9-11 Комбинаторное в тч и анализе.

Главные идеи в подобных задачах чисто комбинаторные: принцип крайнего, принцип Дирихле, индукция, пробуйте рассмотреть по какому-нибудь модулю, усмотрите особенности в каком-то “маленьком” случае. Главное, в этих задачах не бояться условий.

1. Множество A состоит из положительных чисел. Известно, что сумма любых двух его элементов также является элементом, а любой отрезок $[a;\ b]$, $0 < a < b$, содержит отрезок, целиком состоящий из элементов множества A. Докажите, что A содержит все положительные вещественные числа.

2. Дано множество A, состоящее из натуральных чисел и содержащее по крайней мере три числа. Известно, что если $a \in A$, то все делители числа a содержатся в A, если $1 < a < b \in A$, то $ab + 1 \in A$. Докажите, что $A = \mathbb{N}$.

3. Дано 2000 целых чисел, абсолютное значение которых не превосходит 1000, а их сумма равна 1. Докажите, что можно выбрать несколько так, что их сумма будет равняться 0.

4. а) Сумма ста натуральных чисел, каждое из которых меньше 100, равна 200. Докажите, что сумма нескольких из них равна 100.

б) Дано n натуральных чисел, сумма которых меньше $2n$. Докажите, что для любого натурального числа m, не превосходящего сумму этих чисел, можно выбрать несколько из данных чисел так, что их сумма равнялась бы m.

5. Дано $n + 1$ различное число из множества $\{1, \ldots, 2n\}$. Докажите, что одной из этих чисел делится на другое.

6. а) Существует ли такой набор из 100 различных чисел, что сумма любых 99 чисел делится на оставшееся число?

б) Существует ли такой набор из 100 различных чисел, что сумма любых 98 чисел делится на сумму двух оставшихся чисел?

7. Набор из $n + 2$ натуральных чисел назовем интересным, если сумма любых n из них делится на каждое из двух оставшихся чисел. Найдите все интересные наборы, если
а) n — простое;
б) n — натуральное.

8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные положительные числа и пусть M — некоторое множество из $n - 1$ положительного числа, которое не содержит числа $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Кузнечик находится в точке 0 и хочет попасть в точку S. Он может сделать n прыжков, длины которых равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (но порядок может быть другим). Известно, что в точках из множества M находятся ямы. Докажите, что кузнечик может прыгать так, чтобы не попасть в яму.

9. (вначале решить 4) Пусть A конечное подмножество из $\mathbb{N}$. Докажите, что существует такое конечное подмножество B из $\mathbb{N}$, что $A \subset B$ и сумма всех элементов B делит каждый из элементов B.