Воробьями по пушкам.

Полянский Александр*

> Во всем мире нет ничего более мягкого и податливого, чем вода, но она точит твердое и крепкое. Никто не может ее одолеть, хотя любой может ее потеснить. Податливое побеждает крепкое, мягкое одолевает твердое,— все это знают, но никто не осмеливается действовать так.
>
> Лао Цзы «Дао дэ цзин».
> Из главы 78.

Речь пойдёт о трех простых леммах, которые оказывают весьма полезными при решении сложных задач. Автор начал собирать задачи данной подборки после того, как неожиданно для себя самого обнаружил понятное восьмикласснику решение задачи **13**, которая позиционировалась как самая сложная задача Всероссийской олимпиады школьников в 2011 году.

Подборка состоит из 6 частей. Если читатель не заинтересован сразу её решать, то он может обратиться к статье [7], где разобраны некоторые из приведенных ниже задач.

* *e-mail*:alexander.polyanskii@yandex.ru

Первый воробей

1. (первый воробей) На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, B_1 — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что равенство $AC_0 = CA_0$ выполняется тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, B_1 и B лежат на одной окружности

Замечание к задаче 1. Отметим, что если точки C_0 и A_0 «выбегут» за стороны AB и CB, то факты остаются также справедливыми. Следует оговорить, что если C_0 не будет находиться на луче AB и (или) A_0 не будет находиться на луче CB, то длины отрезков AC_0 и (или) CA_0 будем считать отрицательными.

2. В треугольнике ABC точка D — точка касания вписанной в него окружности со стороной BC. Пусть J_b и J_c — центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника AJ_bJ_c, лежит на биссектрисе угла BAC.

3. Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Описанные окружности треугольников A_0B_0C, AB_0C_0 и A_0BC_0 пересекают второй раз описанную окружность треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.

4. На сторонах BA и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, а точки M и M_0 — середины отрезков AC и A_0C_0. Докажите, что если $AC_0 = CA_0$, то прямая MM_0 параллельна биссектрисе $\angle ABC$.

5. Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, CA и AB треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности около треугольника $A_0B_0C_0$ лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда треугольник ABC прямоугольный.

Второй воробей

6. (второй воробей) На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, I — центр вписанной окружности в ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_0BC_0, проходит через I тогда и только тогда, когда $AC_0 + CA_0 = AC$.

Замечание к задаче 6. Во-первых, справедливо замечание к задаче 6. Во-вторых, эту задачу также полезно понимать так:

6'. На прямых AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно. Обозначим через J точку являющуюся серединой дуги AC (без точки B) окружности описанной около треугольника ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_0BC_0, проходит через точку J тогда и только тогда, когда $BA_0 + BC_0 = BA + BC$ (или $AA_0 = -CC_0$).

7. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Точки E и F симметричны точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.

8. Точки A_1, B_1 и C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC следующим образом: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C – центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Докажите, что центр описанной окружности около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

9. Точки A_1, B_1 и C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC следующим образом: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C – центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Докажите, что центр вписанной окружности в треугольник $O_AO_BO_C$, совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

10. Пусть на стороне AC выбрана точка D. Обозначим через I_A и I_C центры вписанных окружностей в треугольники ABD и CBD, а через B_0' точку касания вписанной окружности со стороной AC. Докажите, что угол $I_AB_0'I_C$ — прямой.

11. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки C_1 и A_1. Пусть K — середина A_1C_1, а I — центр вписанной окружности в треугольник ABC. Оказалось, что четырехугольник A_1BC_1I вписанный. Докажите, что угол AKC тупой.

12. Точки O и I являются центрами описанной и вписанной окружностей в треугольнике ABC соответственно. На сторонах BC, CA и AB выбраны такие точки D, E и F, что $BD + BF = CA$ и $CD + CE = AB$. Окружности описанные около треугольников BFD и CDE пересекаются в двух различных точках P и D. Докажите, что $OP = OI$.

13. В неравнобедренном треугольнике ABC B_1 является серединой дуги ABC описанной окружности треугольника ABC, а M — серединой стороны AC. Докажите, что центры I_A и I_C вписанных окружностей в треугольники AMB и CMB, точки B и B_1 лежат на одной окружности.

14. В неравнобедренном треугольник ABC сторона AB короче стороны BC, B_1 является серединой дуги ABC описанной окружности w треугольника ABC, I — центром вписанной окружности в ABC, M — серединой стороны AC. Докажите, что $\angle IB_1B = \angle IMA$.

15. Точки E и F — середины большой дуги A и малой дуги AC описанной около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC ($AB < BC$). Пусть G — проекция E на BC. Докажите, что описанная окружность около треугольника ABG проходит через середину отрезка BF.

Третий воробей

16. (третий воробей) Точки X и Y движутся с постоянными скоростями (не обязательно равными) по двум прямым, пересекающимся в точке O. Докажите, что окружность, описанная около треугольника XYO, проходит через 2 фиксированные точки O и Z, где Z является центром поворотной гомотетии, переводящий местоположения точек X в местоположения точек Y.

Замечание. Первые два воробья являются частными случаями третьего.

17. Дан треугольник ABC и окружность с центром O, проходящая через вершины A и C и повторно пересекающая отрезки AB и BC в различных точках K и N соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABC и KBN, имеют ровно две общие точки B и M. Докажите, что угол OMB — прямой.

18. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса острого угла между высотами AA_1 и CC_1 пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Биссектриса угла B пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника ABC с серединой AC, в точке R. Докажите, что точки P, B, Q и R лежат на одной окружности.

19. (усиление задачи 3) Точки A_1, B_1 и C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Описанные окружности треугольников C_1AB_1, A_1BC_1 и B_1CA_1 пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно (эти точки отличны от вершин треугольника ABC). Точки A_3, B_3 и C_3 симметричны A_1, B_1, C_1 относительно соответствующих середин сторон. Докажите, что треугольники $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ подобны.

20. На высотах (но не на продолжениях высот) остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1, отличные от точки пересечения высот H, такие, что сумма площадей треугольников ABC_1, BCA_1 и CAB_1 равна площади треугольника ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через H.

21. (обобщение задачи **14**) Пусть на дуге BC (не содержащей точки A) описанной окружности w треугольника ABC выбрана точка E, а на стороне AC — точка F. Докажите, что через луч EF — биссектриса угла AEC тогда и только тогда, когда $\angle IEB = \angle IFA$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

22. (теорема Веррьера) Пусть окружность касается описанной окружности треугольника ABC внутренним образом, а сторон AB и BC в точках C_0 и A_0. Докажите, что середина отрезка A_0C_0 совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

23. Пусть окружность касается описанной окружности треугольника ABC внутренним образом, а также сторон AB и BC. Докажите, что прямая $B'I$ проходит через середину дуги ABC описанной окружности треугольника ABC.

24. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку B, выбрана точка E. Докажите, что центры I_a и I_c вписанных окружностей в треугольники AEB и CEB, точка E и точка T_b касания полувписанной (соответствующей вершине B) и описанной окружностей лежат на одной окружности.

25. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность w. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности w, не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности w.

Теорема Микеля и третий воробей

26. (теорема Микеля) Даны четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4 общего положения. Обозначим через w_1 окружность описанную около треугольника образованного l_2, l_3, l_4. Аналогично определяем w_2, w_3, w_4. Докажите, что эти окружности проходят через одну точку.

Замечание к теореме Микеля и третьему воробью. Эти два факта вместе говорят следующее:

«Тараканы» X, Y движутся равномерно и непрерывно по прямым l_x, l_y, пересекающимся в точке O. В первоначальный момент они находились в точках X_0, Y_0, через некоторое время они оказались в точках X_1, Y_1, а еще спустя некоторое время в точках X_2, Y_2. Тогда точка Микеля для прямых l_x, l_y, X_0Y_0, X_1Y_1 и для прямых l_x, l_y, X_0Y_0, X_2Y_2 одна и та же! На самом деле, это точка Микеля для пятерки прямых. Именно об этом следующая задача.

27. Дан четырехугольник $ABCD$ такой, что $BC = AD$ и BC не параллельна AD. На сторонах BC и AD выбраны такие точки E и F, что $BE = DF$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF — в точке Q, прямые EF и AC — в точке R. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PQR (при изменении положений точек E и F), проходят через одну точку, отличную от P.

28. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность w. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности w равноудалена от точек P и Q.

Комментарии

2. Ф. А. Ивлев, 7th Romanian Master of Mathematics, 2015 год, 1 задача второго дня, см. [9]

3. Л. А. Емельянов, XXXI Всероссийская олимпиада школьников, 2005 год, финал, 11 класс, 3 задача первого дня, см. [1].

4. Л. А. Емельянов, 21 Турнир Городов, 1999 год, основной вариант, 10–11 класс, задача 4 (б), см. [10]

5. А. А. Полянский, 54th IMO 2013, 3 задача первого дня, см. [11]

7. Т. Л. Емельянова, XXXVIII Всероссийская олимпиада школьников, 2012 год, региональный этап, 9 класс, 3 задача второго дня, см. [2].

8. А. А. Полянский, XXXVIII Всероссийская олимпиада школьников, 2012 год, финал, 9 класс, 2 задача второго дня, см. [1].

9. А. А. Полянский , XXXVIII Всероссийская олимпиада школьников, 2012 год, финал, 11 класс, 2 задача второго дня, см. [1]

10. И. Ф. Шарыгин, фольклор.

11. А. А. Полянский, 34 Турнир Городов, 2012 год, сложный вариант, 10–11 классы, задача 4, см. [10]

12. 53-rd IMO 2012, Shortlist, задача G6.

13. М. А. Кунгожин, XXXVII Всероссийская олимпиада школьников, 2011 год, финал, 11 класс, 4 задача второго дня.

14. А. В. Бадзян, XXXI Всероссийская олимпиада школьников, 2005 год, зональный этап, 9 класс, 4 задача первого дня (и 10 класс, 3 задача первого дня).

15. Ф. А. Ивлев, XXXVIII Всероссийская олимпиада школьников, 2012 год, окружной этап, 11 класс, 4 задача первого дня.

16. фольклор, например см. задачу 19.28 в [8]

17. И. Ф. Шарыгин, IMO 1985, 2 задача второго дня. Также С. Л. Берлов, Всероссийская олимпиада школьников, 1997 год, финал, 9 класс 3 задача второго дня (и 10 класс, 2 задача второго дня). Отметим, что в последних двух задачах предложено чуть другое расположение точек.

18. С. Л. Берлов, Всероссийская олимпиада школьников, финал, 2000 год, 10 класс, 3 задача.

19. Л. А. Емельянов, IMO 2006, Shortlist, задача G9, см. [6]. Самая трудная задача подборки.

20. С. Л. Берлов, Всероссийская олимпиада школьников, 2001 год, финал, 10 класс, 3 задача второго дня.

21. Все задачи в разделе «Приложение одной задачи» решаются с использованием этой задачи.

22. см.

24. Национальная математическая олимпиада Ирана, 1997 год, 4-й тур, задача 4.

25. А. А. Заславский, В. Ю. Протасов, Устная олимпиада по геометрии, 2013 год, 10 класс, 6 задача.

26. Решается через 3-го воробья. См. главу I, пункт 47 в [5], а также задачу 2.88 в [8].

27. IMO 2005, 2 задача второго дня.

28. М. А. Кунгожин, XL Всероссийская олимпиада школьников, финал, 2014 год, 10 класс 4 задача первого дня (и 11 класс 4 задача первого дня).

Список литературы

[1] Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, О. К. Подлипский, Д. А. Терешин, *Всероссийские олимпиады школьников по математике. Заключительные этапы*, Москва: МЦНМО, 2010.

[2] Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, О. К. Подлипский, Д. А. Терешин, *Математика. Областные олимпиады. 8-11 класс.*, Москва: Просвещение, 2010.

[3] А. Акопян, *Геометрия в картинках*, Москва, 2012.

[4] D. Djukic, V. Janković, I. Matić , N. Petrović, *The IMO compendium*, Springer, 2006.

[5] Д. Ефремов, *Новая геометрия треугольника*, Одесса, 1902

[6] L. A. Emelyanov, P. A. Kogevnikov, *Isotomic similarity*, Journal of classical geometry, **1** (2012), pp. 17–22.

[7] А. Полянский, *Воробьями по пушкам*, Квант, **2**, (2012), 49–50, 60–61.

[8] В.В. Прасолов, *Задачи по геометрия*, Москва, МЦМНО, 2006.

[9] Олимпиада Romanian Masters of Mathematics `http://rmms.lbi.ro/`.

[10] Олимпиада Турнир Городов `http://www.turgor.ru`.

[11] International Mathematical Olympiad `https://www.imo-official.org`

[12] Всероссийская олимпиада школьников по математике `http://olympiads.mccme.ru/vmo/`

Благодарности

Хочется сказать большое спасибо за поддержку всем тем, кто так или иначе содействовал написанию этого сюжета. Особая благодарность Медеубеку Кунгожину, молодому автору шедевров элементарной геометрии, чья задача номер **13** породила этот сюжет, а также Арсению Акопяну, автору книги *Геометрия в картинках*, именно в ней были найдены многие задачи этой подборки!