Заочная олимпиада по комбинаторике 2018

Правила.

1. Олимпиада ориентирована на студентов-бакалавров, но в олимпиаде могут принимать все желающие, в том числе и школьники.

2. При решении задач можно пользоваться любой справочной литературой, но при этом решать нужно самостоятельно.

3. Решения задач присылать в формате .pdf до 1-го апреля 2018 года по электронному адресу comb.olymp@phystech.edu. Например, можно отсканировать или хорошо сфотографировать рукописные тексты; склеить и преобразовать фото и сканы в .pdf можно например тут. На первой странице должны быть написаны ФИО, контактный email и телефон, а также место учёбы и курс (если имеются).

4. За полное решение каждой задачи участники получат 10 баллов, частичные продвижения будут также оцениваться.

5. Победители и призёры получат книги по математике.

6. Новости олимпиады будут доступны в группе ВКонтакте. По всем вопросам обращаться на почту comb.olymp@phystech.edu.

1. В каждую клетку таблицы с несколькими строками и 100 столбцами поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся три столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими столбцами стоят только единицы?

2. а) Докажите, что если степень каждой вершины графа равна d и диаметр графа равен 2, то число вершин в графе не превосходит d^2+1.

б) Докажите, что если указанная оценка достигается, то $d+1$ не кратно пяти.

3. Пусть $p>2$ — простое число. Докажите, что $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ можно разбить на два равномощных множества A и B так, что для любого $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ существует одинаковое количество решений уравнения $x = a+b$, $a \in A, b \in B$.

4. Даны целые числа $n \geq k \geq r \geq 1$. Для разбиения множества $[n] := \{1,\ldots,n\}$ на r частей $A_1,\ldots,A_r$ обозначим через $m_k(A_1,A_2,\ldots,A_r)$ число k-элементных подмножеств $[n]$, имеющих непустое пересечение с каждой из частей. Для какого разбиения $[n]$ на r частей $A_1,\ldots,A_r$ достигается максимальное значение $m_k(A_1,A_2,\ldots,A_r)$?

5. Дано счетное множество событий, каждое имеет вероятность 0.1. Докажите, что существует пять событий таких, что они происходят одновременно с вероятностью больше $0.99 \cdot 10^{-5}$.

6. На плоскости отмечено n точек так, что никакие три не лежат на одной прямой, и некоторые из них соединили отрезками. Оказалось, что любой отрезок пересекает все остальные отрезки за исключением, возможно, одного. Какое наибольшее число отрезков могло быть проведено?

7. Найдите наибольшее c_n такое, что для любых векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$ с суммой, равной нулевому вектору, существуют $\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_{n+1} = \pm 1$ такие, что

$$|\varepsilon_1 \mathbf{v}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \varepsilon_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}|^2 \geq c_n(|\mathbf{v}_1|^2 + \cdots + |\mathbf{v}_{n+1}|^2).$$

8. Пусть множество $K \subseteq \mathbb{R}^2$ таково, что $K \cap (\mathbf{a}+K) = \varnothing$ для некоторого вектора $\mathbf{a}$. Докажите, что тогда два замкнутых круга диаметра $|\mathbf{a}|$ не могут поменяться местами при непрерывном движении их центров по K, при котором круги не будут иметь общую точку.

9. Для графа G назовем кликовым хроматическим числом графа $\underline{\chi}(G)$ минимальное число цветов для такой покраски вершин G, что каждая максимальная по включению неодновершинная клика (полный подграф) содержит хотя бы два разных цвета. Рассмотрим граф $G(n,r,s)$: его вершинами являются r-элементные подмножества n-элементного множества, ребра проведены между парами подмножеств с пересечением мощности ровно s.
а) Докажите, что $\underline{\chi}(G(n,r,0)) = 2$ при $n > N(r)$ для некоторого $N(r)$.
б) Докажите, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} \underline{\chi}(G(n,r,s)) = \infty$ для любого $r > s > 0$.

10. Дан связный недвудольный k-регулярный граф на n вершинах. Матрица $A^{(r)} = (a_{ij}^{(r)})_{i,j=1}^n$ состоит из чисел, определяемых комбинаторно: $a_{ij}^{(r)}$ — число путей длины r из вершины i в вершину j без возвратов, т.е. число путей $i = x_0, x_1, \ldots, x_r = j$, где x_{i-1} и x_i для $1 \leq i \leq r$ — соседние вершины, при этом $x_{i-1} \neq x_{i+1}$ для $1 \leq i \leq r-1$. Найдите $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\mathrm{tr} A^{(r)}}{(k-1)^r}$.