Olimpiada combinatoria 2018

Reglas.

1. Esta olimpiada está enfocada principalmente en estudiantes universitarios. Sin embargo, también está abierta a otros participantes (incluyendo participantes pre-universitarios).

2. Las soluciones deberán ser escritas en inglés o ruso. Recomendamos enviar las soluciones en formato PDF, en un sólo documento. Por favor, escribe tu nombre, email, universidad y año de educación universitaria (si estás en universidad) en la primer página del documento con soluciones. Las soluciones deberán ser enviadas a comb.olymp@phystech.edu antes del 1 de abril de 2018.

3. A una solución completa se le otorgarán 10 puntos. Las soluciones parciales también serán evaluadas.

4. En caso de cualquier pregunta, escribir (en inglés o ruso) a comb.olymp@phystech.edu.

5. Los resultados estarán disponibles en la siguiente página:

   http://polyanskii.com/other/combinatorial-olympiad-2018/

Esta olimpiada es organizada por el Departamento de Matemáticas Discretas del Instituto de Física y Tecnología de Moscú (universidad del Estado). Aquí puedes encontrar información de nuestro programa de maestría internacional en Combinatoria y aplicaciones:

https://mipt.ru/education/chairs/dm/master-s-program-in-discrete-mathematics-2018.php.

Si tienes preguntas de este programa, puedes escribir al Prof. Andrei Michailovich Raigorodskii a la dirección mraigor@yandex.ru.

Problemas.

1. Se tiene una matriz de $n \times 100$ en la que cada elemento es uno o cero. El número de zeros en cada columna de la matriz es mayor que el número de unos. ¿Es cierto que se pueden encontrar 3 columnas de las 100 que satisfagan la siguiente condición: "el número de filas cuya intersección con estas columnas son ceros es mayor que el número de filas cuya intersección con estas columnas son unos"?

2. a) Muestra que si el grado de cada vértice de una gráfica G es d y el diámetro de G es 2, entonces el número de vértices de G no excede $d^2 + 1$.

b) Muestra que si esta cota se alcanza, entonces $d + 1$ no es divisible entre 5.

3. Sea $p > 2$ un número primo. Muestra que $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ puede ser partido en dos conjuntos A y B del mismo tamaño de modo que el número de soluciones $(a, b) \in A \times B$ de la ecuación $x = a + b$ es independiente de $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.

4. Se dan enteros $n \geq k \geq r \geq 1$. Para una partición del conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$ en r subconjuntos $A_1, \ldots, A_r$, denotamos por $m_k(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ al número de subconjuntos de k elementos de $[n]$ que tienen intersección no vacía con cada A_i, $1 \leq i \leq r$. Describe una partición de $[n]$ en r partes $A_1, \ldots, A_r$ que maximice la expresion $m_k(A_1, \ldots, A_r)$.

5. Hay una sucesión infinita de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ que tiene probabilidad 0,1 de ocurrir. Demuestra que existen $i_1, \ldots, i_5$, enteros distintos tales que el evento $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_5}$ tiene probabilidad mayor que $0{,}99 \cdot 10^{-5}$.

6. Hay $n \geq 4$ puntos en posición general en el plano (es decir, no tres de ellos colineares). Se dibujan los segmentos entre algunos pares de puntos. Tras hacer esto, resulta que cada segmento intersecta a todos los demás, excepto a lo más uno (la intersección puede ser en el interior, o en los vértices). Encuentra el máximo número de segmentos que se pueden dibujar.

7. Determina la máxima constante c_n para la cual para cualquier colección de $n+1$ vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}$ en $\mathbb{R}^n$ con suma cero se pueda encontrar $\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_{n+1} = \pm 1$ con la siguiente propiedad:

$$|\varepsilon_1 \mathbf{v}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \varepsilon_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}|^2 \geq c_n (|\mathbf{v}_1|^2 + \cdots + |\mathbf{v}_{n+1}|^2).$$

8. Supongamos que un conjunto $K \subset \mathbb{R}^2$ satisface $K \cap (\mathbf{b} + K) = \varnothing$ para algún vector $\mathbf{b}$. Demuestra que es imposible encontrar dos caminos dentro de K que satisfagan las siguientes dos condiciones:
1) el primer camino va de un punto $A \in K$ a un punto $B \in K$ y el segundo va de B a A;
2) dos discos cerrados de diámetro $|\mathbf{b}|$ nunca se intersectan conforme sus centros se mueven sobre los caminos (uno sobre el camino de A a B y el otro en el de B a A).

9. El *número cromático de clan* $\underline{\chi}(G)$ de una gráfica G sin vértices aislados es el menor número de colores requeridos para una coloración de la gráfica en la cual ningún clan maximal es monocromático (un clan es un conjunto en el que cada par de vértices definen ua arista y es maximal si no es subconjunto propio de ningún otro clan). La gráfica $G(n, r, s)$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los subconjuntos con r elementos de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, y en donde dos tales subconjuntos A y B definen una arista si y sólo si $|A \cap B| = s$.
a) Demuestra que $\underline{\chi}(G(n, r, 0)) = 2$ para $n > N(r)$, donde $N(r)$ es una función que depende sólo de r.
b) Demuestra que $\lim\limits_{n \to \infty} \underline{\chi}(G(n, r, s)) = \infty$ para cualquier $r > s > 0$.

10. Sea G una gráfica conexa, no bipartita, k regular y con n vértices. Las entradas de la matriz $A^{(r)} = (a_{ij}^{(r)})_{i,j=1}^n$ se definen de la siguiente manera: $a_{ij}^{(r)}$ es el número de caminos que no se regresan de longitud r empeando en i y terminando en j, es decir, el número de caminos $i = x_0, x_1, \ldots, x_r = j$, donde x_{i-1} y x_i son vértices adyacentes en G para $1 \leq i \leq r$, y además $x_{i-1} \neq x_{i+1}$ para toda $1 \leq i \leq r - 1$. Determina el valor de $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{\mathrm{tr} A^{(r)}}{(k-1)^r}$.