Правила.

1. Олимпиада ориентирована на студентов-бакалавров, но в олимпиаде могут принимать все желающие, в том числе и школьники.

2. При решении задач можно пользоваться любой справочной литературой, но при этом решать нужно самостоятельно.

3. Решения задач присылать в формате .pdf до 23:59 15-го мая 2019 года по электронному адресу comb.olymp@phystech.edu. Например, можно отсканировать или хорошо сфотографировать рукописные тексты; склеить и преобразовать фото и сканы в .pdf можно, например, тут. На первой странице должны быть написаны ФИО, контактный email и телефон, а также место учёбы и курс (если имеются).

4. За полное решение каждой задачи участники получат 10 баллов, частичные продвижения будут также оцениваться.

5. Победители и призёры получат книги по математике.

6. Новости олимпиады будут доступны в группе ВКонтакте. По всем вопросам обращаться на почту comb.olymp@phystech.edu.

Олимпиада организована кафедрой Дискретной математики МФТИ(ГУ). По следующей ссылке можно найти информацию об онлайн магистратуре по современной комбинаторике: http://omscmipt.ru. Любые вопросы о магистратуре можно задавать профессору Андрею Михайловичу Райгородскому по почте mraigor@yandex.ru или организаторам олимпиады по почте comb.olymp@phystech.edu.

1. Двое играют в игру. На доске написано число 12345678987654321. За один ход можно уменьшить любую цифру на 1 или 2, если после этого на доске получится десятичная запись некоторого натурального числа. Ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Есть 1001 прямоугольник с целыми сторонами, при этом известно, что разность длин сторон у каждого прямоугольника меньше, чем 100. Докажите, что найдется 21 прямоугольник, такие, что в каждой паре один вкладывается в другой (можно поворачивать).

3. Рассмотрим операцию *сжатия* графа G: одновременно соединим ребром все пары вершин на расстоянии, являющемся степенью двойки (старые рёбра остаются). *Характеристикой* графа назовём количество сжатий графа, которые нужно произвести, чтобы получить полный граф. Найдите максимальную характеристику связного графа на 2019 вершинах.

4. Пусть P и D — периметр и диаметр выпуклого многоугольника, соответственно. Допустим, ломаная проходит через все вершины выпуклого многоугольника. Докажите, что её длина не меньше $P - D$.

5. Перед началом однокругового шахматного турнира участники были занумерованы. По окончании турнира оказалось, что во всех результативных партиях у победителя номер был меньше, чем у побеждённого. Назовём партию *интересной*, если по итогам турнира победитель набрал меньше очков, чем побеждённый. Победа — 2 очка, ничья — 1, поражение — 0.

а) Может ли в таком турнире более половины результативных партий быть интересными?

б) Может ли в таком турнире более 99% результативных партий быть интересными?

6. В пространстве дано конечное множество векторов, среди которых нет коллинеарных. Известно, что для любых двух векторов этого множества оно содержит третий, ортогональный им обоим. Докажите, что из множества можно выбросить один вектор так, чтобы остальные лежали в одной плоскости.

7. Есть $n \geq 3$ случайных событий A_1, A_2, $\ldots$, A_n, любые два из них независимы, и вероятность каждого — $1/2$. Найдите наибольшую возможную вероятность события $A_1 A_2 \ldots A_n$.

8. Обозначим через $f(n)$ количество чисел, представимых в виде суммы точного квадрата, меньшего n, и точного куба, меньшего n, то есть $f(n) = |\{a^2 + b^3 \mid 0 \leqslant a^2, b^3 < n, a, b \in \mathbb{Z}\}|$. Докажите, что $f(n) \sim n^{5/6}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{5/6}} = 1$.

9. Докажите, что любые 100 точек на плоскости можно так раскрасить в 10 цветов, что 10 (двумерных) выпуклых многоугольников, каждый из которых образован всеми вершинами некоторого одного цвета (т.е. является их выпуклой оболочкой), будут иметь общую точку.

10. В таблице X с n строками и $t > n$ столбцами расставлены нули и единицы так, что в каждом столбце стоит ровно $s + 1$ единица. Будем говорить, что множество столбцов A *покрывает* столбец b, если для каждой строки число на пересечение этой строки и столбца b не превосходит суммы чисел на пересечении столбцов из A с этой строкой. Известно, что в X никакие s различных столбцов не покрывают другой. Докажите, что $n \geqslant (s+1)^2$.

11. Дано простое число p. *Тором* будем называть множество пар (i, j) остатков по модулю p. *Торической прямой* будем называть множество пар (i, j), удовлетворяющих равенству $ai+bj+c = 0$, где a, b, c — фиксированные остатки по модулю p. Каждому элементу тора поставили в соответствие переменную, принимающую в качестве значения некоторый остаток по модулю p. Изначально значения всех переменных равны 0. Разрешается выбрать торическую прямую и к значениям всех попавших в неё переменных прибавить 1. Сколько различных наборов переменных можно получить?

12. В графе степень каждой вершины нечётна, и существует гамильтонов цикл. Докажите, что в данном графе есть хотя бы два гамильтонова цикла.