

# Задачи на различных олимпиадах.

Полянский Александр\*

26 марта 2018 г.

Обозначения:

В	—	финал Всероссийской олимпиады;
ТГ	—	Турнир Городов;
М	—	Московская математическая олимпиада;
ИМО	—	Международная математическая олимпиада;
ЮМТ	—	Южный математический турнир;
ММ	—	Математическое многоборье;
УОГ	—	Устная олимпиада по геометрии;
ЖК	—	Журнал “Квант”;
Ш	—	финал геометрической олимпиады им. Шарыгина;
Ко	—	турнир Колмогорова;
Ту	—	Туймаада;
RMM	—	Romanian Masters of Mathematics;
Кав	—	Кавказская Математическая Олимпиада;
<b>hardcore!</b>	—	действительно трудная задача (даже для профи);
<b>like!</b>	—	нравится.

1. (В 2007, 10.1) Куб  $n \times n \times n$ , где  $n$  — нечетно, обклеили по клеточкам полосками  $1 \times 2$  в один слой. Докажите, что число согнутых полосок нечётно.

2. (В 2007, 11.2) Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $CB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно. Отрезок  $AA_1$  вторично пересекает вписанную окружность в точке  $Q$ . Прямая  $l$  параллельна  $BC$  и проходит через  $A$ . Прямые  $A_1C_1$  и  $A_1B_1$  пересекают прямую  $l$  в точках  $P$  и  $R$  соответственно. Докажите, что  $\angle PQR = \angle B_1QC_1$ .

3. (В 2008, 10.6) В неравностороннем остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ , точка  $H$  — ортоцентр, точка  $O$  — центр описанной окружности, точка  $B_0$  — середина стороны  $AC$ . Прямая  $BO$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $P$ , а прямые  $BH$  и  $A_1C_1$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что прямые  $HB_0$  и  $PQ$  параллельны.

4. (УОГ 2010, 10–11 классы, 4 задача) Из вершины  $A$  параллелограмма  $ABCD$  опущены высоты  $AM$  на  $BC$  и  $AN$  на  $CD$ . Точка  $P$  — точка пересечения прямых  $BN$  и  $DM$ . Докажите, что прямые  $AP$  и  $MN$  перпендикулярны.

5. (В 2011, 10.6) Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . На продолжениях  $BB_1$  и  $CC_1$  его высот за точки  $B_1$  и  $C_1$  выбраны соответственно точки  $P$  и  $Q$  так, что угол  $PAQ$  — прямой. Пусть  $AF$  — высота треугольника  $APQ$ . Докажите, что угол  $BFC$  — прямой.

---

\* e-mail: alexander.polyanski@yandex.ru

6. (7 ЮМТ, 2011, 4 тур, 6 задача) Пусть биссектриса угла  $B$  пересекают описанную окружность треугольника  $ABC$  и сторону  $AC$  в точках  $B_0$  и  $B_1$ . Пусть  $I_a$  и  $I_c$  центры вневписанных окружностей, соответствующие вершинам  $A$  и  $C$ , точка  $X$  — точка пересечения  $B_0I_a$  и  $B_1I_c$ , точка  $Y$  — точка пересечения  $B_1I_a$  и  $B_0I_c$ . Докажите, что точки  $A, C, X, Y$  лежат на одной окружности.

7. (ТГ, весна 2012, основной тур, 8–9 классы, 5 задача) Пусть  $n$  — простое число. Набор из  $n + 2$  натуральных чисел (не обязательно различных) назовем «интересным», если сумма любых  $n$  из них делится на каждое из двух оставшихся чисел. Найдите все «интересные» наборы. (в задаче можно заменить простое число на произвольное натуральное)

8. (ТГ, устный тур 2012, 5 задача) Вписанная окружность касается сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Вневписанная окружность касается стороны  $BC$  и продолжений сторон  $CA, AB$  в точках  $A_2, B_2, C_2$ . Через середины отрезков  $A_1B_1, A_2B_2$  провели прямую  $l_1$ , а через середины отрезков  $A_1C_1, A_2C_2$  провели прямую  $l_2$ . Докажите, что  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются на высоте  $AH$  треугольника  $ABC$ .

9. (В 2012, 9.6) Точки  $A_1, B_1, C_1$  выбраны на сторонах  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  соответственно. Оказалось, что  $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$ . Пусть  $I_a, I_b$  и  $I_c$  — центры окружностей, вписанных в треугольники  $AB_1C_1, A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$ , соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника  $I_aI_bI_c$ , совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

10. (В 2012, 11.6) Точки  $A_1, B_1, C_1$  выбраны на сторонах  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  соответственно. Оказалось, что  $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$ . Пусть  $O_a, O_b, O_c$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $AB_1C_1, A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$ , соответственно. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник  $O_aO_bO_c$ , совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

11. (ТГ, осень 2012, основной тур, 10–11 классы, 4 задача) На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны соответственно точки  $C_1$  и  $A_1$ , отличные от вершин. Пусть  $K$  — середина  $A_1C_1$ , а  $I$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Оказалось, что четырехугольник  $A_1BC_1I$  вписанный. Докажите, что угол  $AKC$  — тупой.

12. (ММ 2012, геометрический тур, старшие, 4 задача) Дан неравнобедренный треугольник  $ABC$ . Центр вневписанной окружности треугольника, касающейся стороны  $BC$  треугольника, обозначим через  $I_a$ , а точку ее касания с этой стороной — через  $A_1$ . Аналогично определим точки  $I_b, B_1, I_c, C_1$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $AI_aA_1, BI_bB_1$  и  $CI_cC_1$  имеют две общие точки. (уже во время олимпиады выяснили, что это интерпретация теоремы Плюккера)

13. (ММ 2012, устный командный тур, 10–11 классы, 6 задача) Узлом назовем точку, обе ее координаты которой — целые числа. Внутри треугольника  $ABC$  с вершинами в узлах расположено ровно  $n > 0$  узлов. Какое наибольшее число узлов может находиться на стороне  $BC$ ?

14. (like! ТГ, весна 2013, основной тур, 8–9 классы, 4 задача, 10–11 классы, 4 задача; М 2013, 8.5, 9.5) Узлом назовем точку, обе ее координаты которой — целые числа. Внутри треугольника  $ABC$  с вершинами в узлах расположено ровно  $n \geq 2$  узлов. Докажите, что из этих  $n$  узлов можно выбрать два так, чтобы прямая, проходящая через них была параллельна одной из сторон, либо содержала вершину треугольника.

15. (совместно с Л. Емельяновым, В 2013, 10.7) Пусть вписанная окружность с центром  $I$  касается сторон треугольника  $ABC$  в точках  $C_1, A_1, B_1$ , а  $I_a, I_b, I_c$  — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон  $BC, CA$  и  $AB$  соответственно. Пусть  $I_aC_1$  и  $I_cA_1$  пересекаются в точке  $B_2$ . Аналогично построим точки  $C_2, A_2$ . Докажите, что точки  $A_2, B_2, C_2$  лежат на одной окружности (отличной от вписанной) с центром в точке  $I$ .

16. (ЖК №2 2013 г, статья “Одной рукой узелок не завяжешь”) Узлом назовем точку, обе ее координаты которой — целые числа. Многоугольник назовем целым, если все его вершины — узлы. Строго внутри целого треугольника расположен целый выпуклый четырехугольник. Докажите, что внутри треугольника расположен по крайней мере ещё один узел, отличный от вершин четырехугольника.

17. (ЖК №2 2013 г, статья “Одной рукой узелок не завяжешь”) Узлом назовем точку, обе ее координаты которой — целые числа. Центр описанной окружности  $O$  неравнобедренного остроугольного треугольника  $ABC$  с вершинами в узлах является узлом. Какое наименьшее число узлов может быть внутри этого треугольника  $ABC$ ?

18. (like! IMO 2013, 3 задача) Пусть  $A_1, B_1, C_1$  точки касания вневписанных окружностей со сторонами  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что центр описанной окружности около треугольника  $A_1B_1C_1$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$  тогда и только тогда, когда треугольник  $ABC$  прямоугольный.

19. (Ш 2013, 10.6) Про четырехугольник  $ABCD$  известно, что в него можно вписать окружность и то, что  $AB = CD \neq BC$ . Докажите, что угол  $AOB$  острый, где  $O$  — точка пересечения диагоналей этого четырехугольника.

20. (hardcore! Ко 2013, 2 тур, 2 задача) Про целые  $x, y \neq 0$  при некотором нечетном простом  $q$  известно, что  $x^2 = 8y^q + 1$ . Докажите, что  $y - 1$  кратно  $q$ .

21. (ТГ, весна 2014, тренировочный тур, 10–11 классы, 2 задача) В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  диагонали перпендикулярны. На сторонах  $AD$  и  $CD$  отмечены соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что углы  $ABN$  и  $CBM$  прямые. Докажите, что прямые  $AC$  и  $MN$  параллельны.

22. (like! Ш 2014, 9.6) Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $M, N$  — середины дуг  $ABC$  и  $BAC$  описанной окружности. Докажите, что точки  $M, I, N$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $AC + BC = 3AB$ .

23. (like! совместно с [А. Купавским](#), Ту 2015, старшая лига, 8 задача) Пусть на плоскости отмечено  $k(k+1)/2 + 1$ . Некоторые из этих точек соединены друг с другом непересекающимися отрезками так, что эти отрезки не проходят через отмеченные точки. Оказалось, что плоскость разбилась на несколько параллелограммов и одну бесконечную часть. Какое наибольшее число отрезков могло быть проведено.

24. (like! 9th RMM 2017, 3 задача) Обозначим через  $n$  целое число больше 1, а  $X$  множество, состоящее из  $n$  элементов. Непустое семейство подмножеств  $A_1, \dots, A_k$  множества  $X$  называется *плотным*, если их объединение  $A_1 \cup \dots \cup A_k$  является собственным подмножеством множества  $X$  и никакой из элементов из  $X$  не лежит в точности в одном из  $A_i$ . Найдите наибольшее размер такого семейства собственных непустых подмножеств  $X$ , что никакое подсемейство этого семейства не является плотным.

25. (совместно с [Цз. Цзяном](#), Кав 2018, младшая лига, 4 задача) Центром тяжести выпуклого четырехугольника  $PQRS$  является точка пересечения двух его средних

линий (прямая, проходящие через середины  $PQ$  и  $RS$ , и прямая, проходящая через середины  $QR$  и  $SP$ ). Дан шестиугольник  $ABCDEF$  вписанный в окружность  $\omega$  такой, что  $AB = DE$ ,  $BC = EF$ . Пусть  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — центры тяжести четырехугольников  $ABCD$ ,  $BCEF$  и  $CDEA$  соответственно. Докажите, что центр окружности  $\omega$  является точкой пересечения высот треугольника  $XYZ$ .