ФГБОУ ВПО
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 511.36

Полянский Александр Андреевич

О показателях иррациональности некоторых чисел

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
член–корреспондент РАН,
профессор Ю. В. Нестеренко

Москва — 2013

Содержание

Введение

История вопроса

Настоящая диссертация посвящена эффективным приближениям действительных чисел рациональными дробями, одному из ключевых направлений теории диофантовых приближений. В ней доказываются оценки сверху для так называемых показателей иррациональности и квадратичных показателей иррациональности некоторых трансцендентных чисел, а также оценивается показатель совместного приближения чисел $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$ рациональными дробями.

Для любого иррационального числа можно ввести характеристику того, насколько хорошо оно приближается рациональными числами.

Показатель иррациональности *числа $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ определяется как точная верхняя грань множества таких чисел $\varkappa$, что неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < |q|^{-\varkappa} \tag{1}$$

имеет бесконечное количество решений в рациональных числах p/q. Обозначается показатель иррациональности через $\mu(\alpha)$.

При $\varkappa > \mu(\alpha)$ неравенство (1) имеет конечное число решений, а при $\varkappa < \mu(\alpha)$ — бесконечное.

Следствие из теоремы Дирихле (см. § 2 главы 2 в [15]) утверждает, что для любого $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ выполняется неравенство $\mu(\alpha) \geqslant 2$.

Если известно разложение числа $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ в цепную дробь $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, то справедлива формула (см. теорему 1 в [35])

$$\mu(\alpha) = 1 + \limsup_{n \to +\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} = 2 + \limsup_{n \to +\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{\ln q_n},$$

где p_n/q_n — n-ая подходящая дробь числа α.

Пользуясь разложением числа e в цепную дробь $[2; \overline{1, 2\lambda, 1}]_{\lambda=1,2,\ldots}$, нетрудно доказать, что $\mu(e) = 2$. Аналогично для всех чисел

$\alpha = [b_0; b_1, \ldots, b_s, \overline{c_1 + \lambda d_1, \ldots, c_m + \lambda d_m}]_{\lambda=1,2,\ldots}$, где среди d_i есть ненулевые,

можно показать, что $\mu(\alpha) = 2$. Фактически доказан более сильный результат (см. [13]).

В 1955 г. К. Рот опубликовал работу [34], в которой доказал, что $\mu(\alpha) = 2$ для любого действительного алгебраического иррационального числа α (см. также главу V в [16], главу VI в [7]). Следует отметить, что для алгебраических чисел степени больше 2 цепные дроби практически не изучены.

Особый интерес представляют собой доказательства оценок сверху для показателей иррациональности логарифмов алгебраических чисел (см. [6]).

В 1964 г. А. Бейкер в [19] доказал неравенство, из которого следует, что

$$\mu(\ln 2) \leqslant 12,5.$$

Позже эта оценка улучшалась в работах Л. В. Данилова [4], К. Аллади и М. Робинсона [17], Г. В. Чудновского [21], [23], Е. Рейсата [30], Дж. Рина [31], Е. Рухадзе [11], М. Хаты [26]. В 2009 г. в статье [29] Р. Марковеккио, пользуясь групповым методом Рина–Виолы (см. [32], [33]), доказал оценку

$$\mu(\ln 2) \leqslant 3,57455\ldots.$$

В 2010 г. Ю. В. Нестеренко упростил доказательство этого факта в статье [10], в которой он применял тот же подход, что и в [9], где доказывалась иррациональность $\zeta(3)$. В работах [9], [10] использовались несобственные комплексные интегралы типа Меллина–Барнса (см. главу 5 в [8]).

В 1983 г. в работе Е. Рейсата [30] было доказано неравенство

$$\mu(\ln 3) \leqslant 14,7.$$

Позже эта оценка улучшалась в работе в Дж. Рина [31].В 2007 г. в работе [12] В. Х. Салихов привел доказательство оценки

$$\mu(\ln 3) \leqslant 5,125. \tag{2}$$

В 1978 г. в [4] Л. В. Данилов получил неравенство

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leqslant 9,35.$$

Позже эта оценка улучшалась в работах К. Аллади и М. Робинсона [18], Г. В. Чудновского [22], [24], А. К. Дубицкаса [5], Дж. Рина [31], М. Хаты [26], [27]. В 2011 г. В. А. Андросенко и В. Х. Салихов опубликовали работу [1], где, пользуясь методом из вышеупомянутой статьи Р. Марковеккио [29], доказали оценку

$$\mu\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leqslant 4,60106\ldots. \tag{3}$$

Несколько изменив интеграл из статьи Ю. В. Нестеренко [10], М. Г. Башмакова в 2010–2011 гг. предложила в [2], [20] доказательство оценок сверху для показателей иррациональности чисел вида

$$\alpha_k = \sqrt{2k+1}\ln\frac{k+1-\sqrt{2k+1}}{k}, \text{ где } k = 1, 2l \text{ при } l \in \mathbb{Z}, l > 0.$$

В частности, было доказано

$$\mu(\alpha_1) \leqslant 11,918552\ldots, \quad \mu(\alpha_2) \leqslant 3,71331\ldots,$$
$$\mu(\alpha_6) \leqslant 11,826\ldots, \quad \mu(\alpha_8) \leqslant 18,937\ldots. \tag{4}$$

Пусть число $\beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ — квадратичная иррациональность, то есть корень уравнения $ax^2+bx+c=0$, где $a,b,c \in \mathbb{Z}$, $(a,b,c)=1$, $a>0$. Тогда через $H(\beta)$ будем обозначать $\max\{|a|,|b|,|c|\}$.

Для любого числа, не являющегося корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, можно ввести характеристику того, насколько хорошо оно приближается квадратичными иррациональностями.

Квадратичный показатель иррациональности *числа α, не являющегося корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, определяется как точная верхняя грань множества таких чисел $\varkappa$, что неравенство*

$$|\alpha-\beta| < H^{-\varkappa}(\beta) \tag{5}$$

имеет бесконечное количество решений в квадратичных иррациональностях β. Обозначается квадратичный показатель иррациональности через $\mu_2(\alpha)$.

При $\varkappa > \mu_2(\alpha)$ неравенство (5) имеет конечное число решений, а при $\varkappa < \mu_2(\alpha)$ — бесконечное.

В 1980 г. А. Коен в [25] при помощи линейных рекуррент доказал

$$\mu_2(\ln 2) \leqslant 287,819.$$

Позже эта оценка улучшалась в работах Е. Рейсата [30] и М. Хата [28]. В 2009 г. Р. Марковеккио в [29] показал, что

$$\mu_2(\ln 2) \leqslant 15,65142\ldots. \tag{6}$$

В работе [2] М.Г. Башмаковой была доказана оценка квадратичного показателя иррациональности числа $\alpha_2 = \sqrt{5}\ln((3-\sqrt{5})/2)$

$$\mu_2(\alpha_2) \leqslant 33,0094\ldots. \tag{7}$$

Для двух иррациональных чисел можно ввести характеристику того, насколько хорошо можно их приблизить рациональными числами с общим знаменателем.

Показатель совместного приближения *для двух чисел α, $\beta \notin \mathbb{Q}$ определяется как точная верхняя грань множества таких чисел $\varkappa$, что неравенство*

$$\max\left\{\left|\alpha - \frac{p_1}{q}\right|, \left|\beta - \frac{p_2}{q}\right|\right\} < |q|^{-\varkappa}$$

имеет бесконечное количество решений в рациональных числах p_1/q и p_2/q.

Следствие из теоремы Дирихле о совместных приближениях (см. § 2 главы II в [16]) утверждает, что показатель совместного приближения для любых двух иррациональных чисел больше или равен $1,5$.

Краткое содержание диссертации

Основными результатами **первой главы** являются новые оценки сверху для показателей иррациональности чисел

$$\alpha_k = \sqrt{2k+1}\ln\frac{k+1-\sqrt{2k+1}}{k}, \tag{8}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 2$, и

$$\beta_k = \sqrt{2k-1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2k-1}}{k-1}, \tag{9}$$

где $k = 2l$ при $l \in \mathbb{Z}$, $l > 0$, и квадратичных показателей иррациональности чисел α_k, где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 10$, и β_k, где $k = 2l$ при $l \in \mathbb{Z}$, $l > 4$ (для меньших положительных значений k более точные оценки получены в третьей главе).

При этом исследуются функции $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$, определенные следующим образом:

$$J_l(t) = \frac{t^{-\frac{b_1 n+2}{2}}}{2\pi i}\int_{L_l}\Psi_l(\zeta)d\zeta, \tag{10}$$

где

$$\Psi_1(\zeta) = A(\zeta)\left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right)(-t)^{-\zeta},$$
$$\Psi_2(\zeta) = A(\zeta)\left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right)^2 t^{-\zeta},$$
$$\Psi_3(\zeta) = A(\zeta)\left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right)^3 (-t)^{-\zeta}.$$

Здесь в качестве многочлена $A(x)$ используется многочлен

$$\binom{x+b_1n+1}{c_1n+1}\binom{x+b_2n+1}{c_2n+1}\binom{x+b_3n+1}{c_3n+1}. \tag{11}$$

На целые неотрицательные параметры b_i, c_i накладываются некоторые условия, а число n — натуральное. Таким образом, $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ задают три последовательности функций. Контуры интегрирования L_1, L_2, L_3 выбираются определенным образом.

Справедливы тождества

$$J_1(t) = -U_1(t), \quad J_2(t) = U_1(t)\ln t - U_2(t), \tag{12}$$
$$J_3(t) = -\frac{1}{2}U_1(t)\ln^2 t + U_2(t)\ln t - \frac{1}{2}U_3(t) - i\pi(U_1(t)\ln t - U_2(t)). \tag{13}$$

Здесь $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ удовлетворяют равенствам

$$U_1(t) = W_1\left(t+\frac{1}{t}\right), U_2(t) = \left(t-\frac{1}{t}\right)W_2\left(t+\frac{1}{t}\right), U_3(t) = W_3\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

для некоторых $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t) \in \mathbb{Q}(t)$.

Чтобы получить оценки показателей иррациональности чисел α_k, мы рассматриваем линейную комбинацию функций

$$J_2(t) = U_1(t)\ln t - U_2(t), \tag{14}$$

с коэффициентами $U_i(t) \in \mathbb{Q}(t)$ при значениях параметра t, равных

$$\lambda_{k,1} = \frac{k+1-\sqrt{2k+1}}{k}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, k > 0. \tag{15}$$

В результате получаем последовательности рациональных дробей, которые приближают числа α_k. Применяется метод перевала для исследования асимптотического поведения этих последовательностей и используются известные факты о распределении простых чисел для исследования арифметических свойств рациональных дробей, приближающих числа α_k. В итоге, используя полученные результаты и применяя к этим последовательностям лемму Хаты о оценках сверху показателей иррациональностей (см. утверждение 2.1 в [27], см. ниже лемму 10), мы доказываем теорему 1.

Теорема 1. *Справедливы оценки.*

k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$
3	$6,64610\ldots$	9	$5,23162\ldots$	14	$3,42052\ldots$	19	$4,75667\ldots$
5	$5,82337\ldots$	10	$3,45355\ldots$	15	$4,88401\ldots$	20	$3,39024\ldots$
6	$3,51433\ldots$	11	$5,08119\ldots$	16	$3,40866\ldots$		
7	$5,45247\ldots$	12	$3,43506\ldots$	17	$4,81442\ldots$		
8	$3,47833\ldots$	13	$4,97025\ldots$	18	$3,39873\ldots$		

Эти результаты усиливают соответствующие неравенства (4) для $\mu(\alpha_6)$ и $\mu(\alpha_8)$ из работы М. Г. Башмаковой [20].

Показатели иррациональности для чисел α_k с нечетными $k > 1$ ранее не оценивались.

Чтобы получить оценки квадратичных показателей иррациональности чисел α_k, мы рассматриваем линейные комбинации

$$J_2(t) = U_1(t)\ln t - U_2(t),\ \ 2J_3(t) + 2(i\pi + \ln t)J_2(t) = U_1(t)\ln^2 t - U_3(t) \quad (16)$$

с коэффициентами $U_i(t) \in \mathbb{Q}(t)$ при значениях параметра t, равных (15). В результате получаем последовательности рациональных дробей, которые приближают числа α_k и α_k^2. Применяется метод перевала для исследования асимптотического поведения этих последовательностей и используются известные факты о распределения простых чисел для исследования арифметических свойств рациональных дробей, приближающих числа α_k и α_k^2. В итоге, используя полученные результаты и применяя к этим последовательностям лемму Хаты о оценках сверху квадратичных показателей иррациональностей (см. лемму 2.3 в [28], см. ниже лемму 12), мы доказываем теорему 2.

Теорема 2. *Справедливы оценки.*

k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
11	*297,68074...*	*15*	*50,60816 ...*	*19*	*31,98452...*
12	*9,46081...*	*16*	*8,71172...*	*20*	*8,23651...*
13	*80,82763...*	*17*	*38,51000...*		
14	*9,04083...*	*18*	*8,45082...*		

Отметим, что в работе [29] Р. Марковеккио упоминает, что получил такую же, как и в теореме 2, оценку для $\mu_2(\ln(2/3)) = \mu_2(\alpha_{12})$.

Квадратичные показатели иррациональности для остальных чисел α_k, приведенных в теореме 2, ранее не оценивались.

Чтобы получить оценки показателей иррациональности чисел β_k, мы рассматриваем линейную комбинацию (14) при значениях параметра t, равных

$$\lambda_{k,2} = \frac{k-1-i\sqrt{2k-1}}{k} = e^{-i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2k-1}}{k-1}}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, k > 1. \tag{17}$$

В результате получаем последовательности рациональных дробей, которые приближают числа β_k. Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 1, мы устанавливаем справедливость теоремы 4.

Теорема 4. *Справедливы оценки.*

k	$\mu(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu(\beta_k) \leqslant$
2	$4,60105\ldots$	8	$3,66666\ldots$	14	$3,53683\ldots$	20	$3,47757\ldots$
4	$3,94704\ldots$	10	$3,60809\ldots$	16	$3,51298\ldots$		
6	$3,76069\ldots$	12	$3,56730\ldots$	18	$3,49365\ldots$		

Отметим, что в статье [1] В. А. Андросенко и В. Х. Салихов получили такую же оценку для $\mu\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \mu(\beta_2)$, как и в теореме 4. Но доказательство в [1] отличается от того, что будет предложено в настоящей диссертации.

Показатели иррациональности для остальных чисел β_k, приведенных в теореме 4, ранее не оценивались.

Чтобы получить оценки квадратичных показателей иррациональности чисел β_k, мы рассматриваем линейные комбинации (16) при значениях параметра t, равных (17). В результате получаем последовательности рациональных дробей, которые приближают числа β_k и β_k^2. Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 2, мы устанавливаем справедливость теоремы 5.

Теорема 5. *Справедливы оценки.*

k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$
10	$12,28656\ldots$	14	$10,34013\ldots$	18	$9,35032\ldots$
12	$11,11119\ldots$	16	$9,77530\ldots$	20	$9,01564\ldots$

Квадратичные показатели иррациональности для чисел β_k, приведенных в таблице в теореме 5, ранее не оценивались.

Основным результатом **второй главы** является следующее утверждение.

Теорема 6. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $q(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для любых p_1, p_2, $q \in \mathbb{Z}$, $q(\varepsilon) \leqslant q$, выполняется*

$$\max\left\{\left|\ln 3 - \frac{p_1}{q}\right|, \left|\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{p_2}{q}\right|\right\} \geqslant |q|^{-\mu-\varepsilon},$$

где $\mu = 3,86041\ldots$.

Отметим, что для каждого из чисел $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$ в настоящее время доказаны менее точные оценки, см. (2) и (3). Показатель совместного приближения $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$ ранее не оценивался.

Для доказательства теоремы 6 используется общая лемма 14.

Лемма 14. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $l_n = q_n\alpha + p_n$, где $q_n, p_n \in \mathbb{Z}\left[i\sqrt{m}\right]$. Известно, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln|q_n| = \sigma, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln|l_n| = -\tau, \quad \sigma, \tau > 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $q(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для любых p, $q \in \mathbb{Z}[i\sqrt{m}]$, $|q| \geqslant q(\varepsilon)$, выполняется

$$|p + q\alpha| \geqslant |q|^{-\left(\frac{\sigma}{\tau}+\varepsilon\right)}.$$

Чтобы применить лемму 14, рассматриваются функции $J_1(t)$, $J_2(t)$ из первой главы (см. (10)). Во второй главе мы исследуем линейную комбинацию (14) при значении параметра t, равном

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{i\pi}{6}}. \tag{18}$$

В результате получаем последовательность чисел из $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, которые приближают число $\ln 3 + i\pi/3$. Применяется метод перевала для исследования асимптотического поведения этих последовательностей и используются известные факты о распределении простых чисел для исследования арифметических свойств чисел из $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, приближающих число $\ln 3 + i\pi/3$. Используя полученные результаты и применяя к этим последовательностям лемму 14, мы доказываем теорему 6.

Основными результатами **третьей главы** являются новые оценки сверху для квадратичных показателей иррациональности чисел α_k (см. (8)), где $k = 2, 4, 6, 8, 10$, и β_k (см. (9)), где $k = 4, 6, 8$ (для бóльших значений k более точные оценки получены в первой главе).

Для этого используются функции $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ из первой главы (см. (10)). Но вместо (11) выбирается многочлен

$$\binom{x+b_1n+1}{c_1n+1}\binom{x+b_2n+1}{c_2n+1}\binom{x+b_3n+1}{c_3n+1}\binom{x+b_4n+1}{c_4n+1}.$$

Тогда справедливы тождества (12) и (13), а $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ удовлетворяют равенствам

$$U_1(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right) W_1\left(t + \frac{1}{t}\right), \; U_2(t) = W_2\left(t + \frac{1}{t}\right),$$
$$U_3(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right) W_3\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

для некоторых функций $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t) \in \mathbb{Q}(t)$.

Чтобы получить оценки квадратичных показателей иррациональности чисел α_k, мы рассматриваем линейные комбинации (16) при значениях параметра t, равных (15). В результате получаем последовательности рациональных дробей, которые приближают числа α_k и α_k^2. Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 2, мы устанавливаем справедливость теоремы 7.

Теорема 7. *Справедливы оценки.*

k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
2	*18,57994...*	*6*	*11,20381...*	*10*	*9,86485...*
4	*12,84161...*	*8*	*10,37857...*		

Эти результаты улучшают соответствующие неравенства (6) для $\mu(\alpha_4) = \mu(\ln 2)$ и (7) для $\mu(\alpha_2)$ из работ Р. Марковеккио [29] и М. Г. Башмаковой [2].

Квадратичные показатели иррациональности для чисел α_k, где $k = 6, 8, 10$, ранее не оценивались.

Чтобы получить оценки квадратичных показателей иррациональности чисел β_k, мы рассматриваем линейные комбинации (16) при значениях параметра t, равных (17). В результате получаем последовательности рациональных дробей, которые приближают числа β_k и β_k^2. Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 2, мы устанавливаем справедливость теоремы 8.

Теорема 8. *Справедливы оценки.*

k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$
4	$32,26974\ldots$	6	$17,64930\ldots$	8	$14,12795\ldots$

Квадратичные показатели иррациональности для чисел β_k при $k = 4, 6, 8$ ранее не оценивались.

В конце отметим, что функция $J_3(t)$ (см. (10)) исследовалась в [3], а функция $J_2(t)$ без множителя $t^{-\frac{b_1 n+2}{2}}$ исследовалась в [10]. Тем не менее, в [3], [10] не рассматривались значения параметра t, равные комплексным числам (17) и (18).

Основные результаты

1. Доказаны новые оценки показателей иррациональности чисел

$$\alpha_k = \sqrt{2k+1}\ln\frac{k+1-\sqrt{2k+1}}{k}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, k > 0,$$

улучшающие результаты работы М. Г. Башмаковой [3]. См. ниже теорему 1.

2. Доказаны новые оценки квадратичных показателей иррациональности чисел α_k, где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 2$, улучшающие результаты работ Р. Марковеккио [29] и М. Г. Башмаковой [3]. См. ниже теоремы 2, 7.

3. Доказаны новые оценки показателей иррациональности чисел

$$\beta_k = \sqrt{2k-1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2k-1}}{k-1}, \text{ где } k = 2l \text{ при } l \in \mathbb{Z}, l > 0.$$

Оценка показателя иррациональности для числа $\beta_2 = \pi/\sqrt{3}$, которая была получена другим способом в работе В. А. Андросенко и В.Х. Салихова [1], совпадает с той, что предложена в настоящей диссертации. Для остальных чисел β_k показатели иррациональности оцениваются впервые. См. ниже теорему 4.

4. Впервые получены оценки квадратичных показателей иррациональности чисел β_k, где $k = 2l$ при $l \in \mathbb{Z}$, $l > 1$. См. ниже теоремы 5, 8.

5. Впервые получена оценка показателя совместного приближения чисел $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$ рациональными дробями. См. ниже теорему 6.

Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в работах [36] – [39].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю члену–корреспонденту РАН, профессору Юрию Валентиновичу Нестеренко за постановку задач и постоянное внимание к работе.

1 Оценки показателей иррациональности и квадратичных показателей иррациональности α_k и β_k

Получены оценки сверху показателей иррациональности и квадратичных показателей иррациональности чисел α_k и β_k (см. (8) и (9)).

Обозначения, которые вводятся при доказательстве какого-то утверждения (леммы, следствия, предложения, теоремы), не будут использоваться при доказательстве других утверждений. Общие для всей главы обозначения вводятся вне доказательств.

1.1 Основные определения

Через l будем обозначать любое число из множества $\{1, 2, 3\}$.

Определим многочлен $A(x)$ следующим образом:

$$A(x) = \binom{x + b_1 n + 1}{c_1 n + 1}\binom{x + b_2 n + 1}{c_2 n + 1}\binom{x + b_3 n + 1}{c_3 n + 1} =$$

$$= \frac{(x + a_1 n + 1)\dots(x + b_1 n + 1)}{(c_1 n + 1)!}\frac{(x + a_2 n + 1)\dots(x + b_2 n + 1)}{(c_2 n + 1)!}\times \\ \times\frac{(x + a_3 n + 1)\dots(x + b_3 n + 1)}{(c_3 n + 1)!}. \qquad (1.1)$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$, выбраны целые неотрицательные параметры

$$\begin{gathered} a_1 = 0 \leqslant a_2 \leqslant a_3 < b_3 \leqslant b_2 \leqslant b_1, \\ c_1 = b_1 - a_1 = b_1, c_2 = b_2 - a_2, c_3 = b_3 - a_3, \\ b_1 = b_1 + a_1 = b_2 + a_2 = b_3 + a_3, \end{gathered} \qquad (1.2)$$

при этом b_1 — четное. Нетрудно заметить, что a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1.
Обозначим степень многочлена $A(x)$ через $N = (c_1 + c_2 + c_3)n + 3$. Отметим важное свойство многочлена $A(x)$

$$A(x) = -A(-x - b_1 n - 2). \qquad (1.3)$$

Рассмотрим интегральные представления функций $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$, $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$

$$J_l(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} I_l(t) = \frac{t^{-\frac{b_1 n+2}{2}}}{2\pi i} \int_{L_l} \Psi_l(\zeta)\, d\zeta, \tag{1.4}$$

здесь $t \neq 0$, вертикальные прямые L_1, L_2, L_3 задаются следующим образом:

$$L_l = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = d_l n + iy, -\infty < y < +\infty\}, \text{ где } -b_l < d_l < -a_l, \tag{1.5}$$

и эти прямые проходятся снизу вверх.

В (1.4) функции $\Psi_1(\zeta)$, $\Psi_2(\zeta)$, $\Psi_3(\zeta)$ определены равенствами

$$\Psi_1(\zeta) = A(\zeta)\left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right)(-t)^{-\zeta}, \tag{1.6}$$

$$\Psi_2(\zeta) = A(\zeta)\left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right)^2 t^{-\zeta}, \tag{1.7}$$

$$\Psi_3(\zeta) = A(\zeta)\left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right)^3 (-t)^{-\zeta}. \tag{1.8}$$

Здесь мы полагаем

$$(-t)^{-\zeta} = e^{-\zeta \ln(-t)} \ \text{ и } \ t^{-\zeta} = e^{-\zeta \ln t},$$

где выбираются ветви логарифмов

$$\ln(-t) = \ln|t| + i \arg t + i\pi \text{ и } \ln t = \ln|t| + i \arg t$$

с соответствующими условиями на аргумент

$$-2\pi < \arg t < 0 \text{ для (1.6)},$$
$$-2\pi < \arg t < 2\pi \text{ для (1.7)},$$
$$-4\pi < \arg t < 2\pi \text{ для (1.8)}.$$

1.2 Функциональные свойства $J_1(t), J_2(t), J_3(t)$

Многочлены $A_1(x), A_2(x)$ и $A_3(x)$ определим равенством

$$A_l(x) = A(x - a_l n). \tag{1.9}$$

Предложение 1. *Для любого* $t \in \mathbb{C}$, $0 < |t| \leqslant 1$ *(кроме случаев, оговоренных ниже), выполняются тождества*

$$J_1(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} I_1(t) = -U_1(t), \tag{1.10}$$

$$J_2(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} I_2(t) = U_1(t)\ln t - U_2(t), \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered} J_3(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} I_3(t) = \\ = -\frac{1}{2}U_1(t)\ln^2 t + U_2(t)\ln t - \frac{1}{2}U_3(t) - i\pi(U_1(t)\ln t - U_2(t)). \end{gathered} \tag{1.12}$$

Здесь $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t) \in \mathbb{Q}(t)$, *а также* $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t) \in \mathbb{Q}(t)$ *определены следующим образом:*

$$U_1(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} V_1(t) = t^{a_1 n - \frac{b_1 n+2}{2}} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{c_1 n+2} \sum_{j=c_1 n+1}^{N} e_j^{(1)} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{j-c_1 n-1},$$

$$\text{где } e_j^{(1)} = \sum_{k=c_1 n+2}^{j+1} (-1)^{k-1} A_1(-k) \binom{j}{k-1},$$

$$U_2(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} V_2(t) = t^{a_2 n - \frac{b_1 n+2}{2}} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{c_2 n+2} \sum_{j=c_2 n+1}^{N-1} e_j^{(2)} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{j-c_2 n-1},$$

$$\text{где } e_j^{(2)} = \sum_{k=c_2 n+2}^{j+1} (-1)^{k-1} A_2'(-k) \binom{j}{k-1},$$

$$U_3(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} V_3(t) = t^{a_3 n - \frac{b_1 n+2}{2}} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{c_3 n+2} \sum_{j=c_3 n+1}^{N-2} e_j^{(3)} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{j-c_3 n-1},$$

$$\text{где } e_j^{(3)} = \sum_{k=c_3 n+2}^{j+1} (-1)^{k-1} A_3''(-k) \binom{j}{k-1}.$$

Ветви логарифмов выбираются так в обеих частях (1.10)–(1.12), что

$$\ln(-t) = \ln|t| + i\arg t + i\pi, \ \ln t = \ln|t| + i\arg t,$$

$$-2\pi < \arg t < 0 \text{ для (1.10)}, \tag{1.13}$$

$$-2\pi < \arg t < 2\pi \text{ для (1.11)}, \tag{1.14}$$

$$-4\pi < \arg t < 2\pi \text{ для (1.12)}. \tag{1.15}$$

Доказательство предложения 1. Поскольку $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ отличаются от $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ множителем $t^{-\frac{b_1 n+2}{2}}$ (см. (1.4)), поэтому доказательство будем вести для $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$.

Через C_i будем обозначать положительные константы; если в скобках указана переменная n, то константа зависит от n. Считаем, что $\zeta = \sigma + i\tau$.

1. Покажем, что интегралы $I_l(t)$ абсолютно сходятся при $t \neq 0$.
Для любого $\zeta \in L_l$, то есть при $\sigma = d_l n$, справедливы оценки

$$|A(\zeta)| < (|\zeta| + b_1 n + 1)^N < C_1(n)|\zeta|^N, \text{ поскольку } |\zeta| \geqslant C_2 n, \tag{1.16}$$

$$\left|\left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right)^l\right| < C_3 e^{-l|\tau|\pi} \text{ при } |\tau| > \frac{1}{\pi}, \tag{1.17}$$

$$\text{так как } \left|\frac{1}{\sin \zeta}\right| < 4e^{-|\tau|} \text{ при } |\tau| > 1,$$

$$|(-t)^{-\zeta}| = e^{-\sigma \ln |t| + \tau \arg t + \tau\pi} = C_4(n) e^{\tau \arg t + \tau\pi}, \tag{1.18}$$

$$|t^{-\zeta}| = e^{-\sigma \ln |t| + \tau \arg t} = C_5(n) e^{\tau \arg t}. \tag{1.19}$$

Отсюда при $|\tau| > 1/\pi$ находим

$$|\Psi_l(\zeta)| < C_6(n)|\zeta|^N e^{r_l(\tau)}. \tag{1.20}$$

Здесь

$$r_1(\tau) = -|\tau|\pi + \tau \arg t + \tau\pi = \begin{cases} \tau \arg t, & \text{если } \tau \geqslant 0, \\ \tau(2\pi + \arg t), & \text{если } \tau < 0, \end{cases}$$

$$r_2(\tau) = -2|\tau|\pi + \tau \arg t = \begin{cases} \tau(-2\pi + \arg t), & \text{если } \tau \geqslant 0, \\ \tau(2\pi + \arg t), & \text{если } \tau < 0, \end{cases}$$

$$r_3(\tau) = -3|\tau|\pi + \tau \arg t + \tau\pi = \begin{cases} \tau(-2\pi + \arg t), & \text{если } \tau \geqslant 0, \\ \tau(4\pi + \arg t), & \text{если } \tau < 0. \end{cases}$$

Интегрируя (1.20), получаем, что интегралы $I_l(t)$ абсолютно сходятся при любом таком $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$, что выполнены условия (1.13)–(1.15).

2. Вычислим $I_l(t)$.
Считаем, что $0 < |t| < 1$. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ с вершинами

$$A(-M_1, M_1), B(-M_1, -M_1), C(d_l n, -M_1), D = (d_l n, M_1),$$

здесь $M > |d_l n|$ — натуральное число, а $M_1 = M + 1/2$.

Очевидно, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ABCDA}\Psi_l(\zeta)d\zeta = \sum_{k=b_l n+2}^{M} Res_{\zeta=-k}(\Psi_l(\zeta)). \qquad (1.21)$$

Докажем, что

$$\lim_{M\to+\infty}\int_{DA}\Psi_l(\zeta)d\zeta = \lim_{M\to+\infty}\int_{AB}\Psi_l(\zeta)d\zeta = \lim_{M\to+\infty}\int_{BC}\Psi_l(\zeta)d\zeta = 0. \qquad (1.22)$$

На отрезке AB имеем $\sigma = -M_1$. Пользуясь оценками, которые аналогичны (1.16)–(1.19), получаем при $|\tau| > \frac{1}{\pi}$ и достаточно большом M

$$|\Psi_l(\zeta)| \leqslant C_7(n)(2M_1)^N |t|^{M_1} e^{r_l(\tau)}. \qquad (1.23)$$

При $\tau \leqslant \frac{1}{\pi}$ справедливо

$$|\Psi_l(\zeta)| \leqslant C_8(n)(2M_1)^N |t|^{M_1}. \qquad (1.24)$$

На отрезках DA и BC имеем $|\tau| = M_1$. При достаточно большом M находим

$$|\Psi_l(\zeta)| \leqslant C_9(n)(2M_1)^N e^{r_l(\pm M_1)} e^{-\sigma \ln|t|}. \qquad (1.25)$$

Интегрируя (1.23)–(1.25) по соответствующим отрезкам, получаем (1.22). То есть из (1.21) имеем

$$I_l(t) = \sum_{k=b_l n+2}^{+\infty} Res_{\zeta=-k}\left(\Psi_l(\zeta)\right).$$

3. Найдем вычеты функций $\Psi_l(\zeta)$ в точках $\zeta = -k$.
В окрестностях этих точек выполняются равенства

$$\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right) = (-1)^k\left(\frac{1}{(\zeta+k)} + O(1)\right),$$
$$\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)^2 = \left(\frac{1}{(\zeta+k)^2} + O(1)\right),$$
$$\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)^3 = (-1)^k\left(\frac{1}{(\zeta+k)^3} + \frac{\pi^2}{2(\zeta+k)} + O(1)\right),$$

$$A(\zeta) = A(-k) + A'(-k)(\zeta+k) + \frac{A''(-k)}{2}(\zeta+k)^2 + O((\zeta+k)^3),$$

$$(-t)^{-\zeta} = e^{-\zeta(\ln t + \pi i)} = e^{k(\ln t+\pi i)} e^{-(\zeta+k)(\ln t+\pi i)} =$$

$$= (-1)^k t^k \left(1 - (\ln t + \pi i)(\zeta+k) + \frac{1}{2}(\ln t + \pi i)^2(\zeta+k)^2 + O((\zeta+k)^3)\right),$$

$$t^{-\zeta} = e^{-\zeta \ln t} = e^{k\ln t} e^{-(\zeta+k)\ln t} = t^k \left(1 - \ln t(\zeta+k) + O((\zeta+k)^2)\right).$$

Поэтому мы получаем

$$Res_{\zeta=-k}\left(\Psi_1(\zeta)\right) = t^k A(-k),$$

$$Res_{\zeta=-k}\left(\Psi_2(\zeta)\right) = t^k\left(-\ln t A(-k) + A'(-k)\right),$$

$$Res_{\zeta=-k}\left(\Psi_3(\zeta)\right) =$$

$$= t^k \left(\frac{1}{2}(\ln t + \pi i)^2 A(-k) + (-(\ln t + \pi i))A'(-k) + \frac{1}{2}A''(-k) + \frac{\pi^2}{2}A(-k)\right) =$$

$$= t^k \left(\frac{1}{2}\ln^2 t A(-k) - \ln t A'(-k) + \frac{1}{2}A''(-k) + \pi i\big(\ln t A(-k) - A'(-k)\big)\right).$$

Откуда заключаем

$$I_1(t) = \sum_{k=b_1 n+2}^{+\infty} A(-k)t^k, \tag{1.26}$$

$$I_2(t) = \sum_{k=b_2 n+2}^{+\infty} t^k\big(-\ln t A(-k) + A'(-k)\big) =$$

$$= -\ln t \left(\sum_{k=b_1 n+2}^{+\infty} A(-k)t^k\right) + \left(\sum_{k=b_2 n+2}^{+\infty} A'(-k)t^k\right),$$

$$I_3(t) = \sum_{k=b_3 n+2}^{+\infty} t^k\Big(\frac{1}{2}\ln^2 t A(-k) - \ln t A'(-k) + \frac{1}{2}A''(-k) +$$

$$+ \pi i\big(\ln t A(-k) - A'(-k)\big)\Big) = \frac{1}{2}\ln^2 t \left(\sum_{k=b_1 n+2}^{+\infty} A(-k)t^k\right) -$$

$$- \ln t \left(\sum_{k=b_2 n+2}^{+\infty} A'(-k)t^k\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=b_3 n+2}^{+\infty} A''(-k)t^k\right) +$$

$$+ \pi i \left(\ln t \left(\sum_{k=b_1 n+2}^{+\infty} A(-k)t^k\right) - \left(\sum_{k=b_2 n+2}^{+\infty} A'(-k)t^k\right)\right).$$

4. С помощью леммы 1 будет показано, что при $t \in \mathbb{C}$, $|t| < 1$, выполняется (см. определения $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t)$ в формулировке предложения 1)

$$-\sum_{k=b_1n+2}^{+\infty} A^{(l-1)}(-k)t^k = V_l(t). \tag{1.27}$$

Лемма 1 была доказана в [10] (см. лемму 1). В настоящей диссертации будет приведено элементарное доказательство.

Лемма 1. *Пусть $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен степени m. Тогда для каждого $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, справедливо равенство*

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} P(-k)z^k = \sum_{j=0}^{m} h_j \left(\frac{z}{z-1}\right)^{j+1}, \tag{1.28}$$

где

$$h_j = \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} P(-k) \binom{j}{k-1}, \qquad j \geqslant 0.$$

Доказательство леммы 1. Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ можно представить следующим образом:

$$P(x) = \sum_{s=0}^{m} v_s P_s(x), \text{ где } P_s(x) = (x+1)\ldots(x+s), \ v_s \in \mathbb{C}.$$

Поэтому нам достаточно проверить равенство (1.28) для каждого из многочленов $P_s(x)$. Считаем, что $P(x) = P_s(x)$.

Вычислим левую часть (1.28). Используя замену $r = k - s - 1$, получаем

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} P(-k)z^k = -z^{s+1} \sum_{k=s+1}^{+\infty} P(-k)z^{k-s-1} = -z^{s+1} \sum_{r=0}^{+\infty} P(-r-s-1)z^r =$$
$$= -z^{s+1} \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^s \frac{(r+s)!}{r!} z^r = (-z)^{s+1} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{(s)} = s! \left(\frac{z}{z-1}\right)^{s+1}.$$

Вычислим правую часть (1.28). При $j = 0, 1, \ldots, s-1$ нетрудно убедиться, что $h_j = 0$. При $j = s$ мы получаем

$$h_s = \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^{k-1} P(-k) \binom{s}{k-1} = (-1)^s (-1)^s s! \binom{s}{s} = s!.$$

Используя замену $r = k - s - 1$, в случае $j = s + i$, где $i \geqslant 1$, имеем

$$h_{s+i} = \sum_{k=1}^{s+i+1} (-1)^{k-1} P(-k) \binom{s+i}{k-1} = \sum_{k=s+1}^{s+i+1} (-1)^{k-1} P(-k) \binom{s+i}{k-1} =$$
$$= \sum_{r=0}^{i} (-1)^{s+r} (-1)^s \frac{(s+r)!}{r!} \frac{(s+i)!}{(s+r)!(i-r)!} =$$
$$= \frac{(s+i)!}{i!} \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} = \frac{(s+i)!}{i!} (1-1)^i = 0.$$

То есть правая часть (1.28) равна

$$\sum_{j=0}^{m} h_j \left(\frac{z}{z-1} \right)^{j+1} = s! \left(\frac{z}{z-1} \right)^{s+1}.$$

Таким образом, правая и левая части (1.28) совпадают.

Лемма 1 доказана. □

Пользуясь (1.9), несложно проверить

$$\begin{aligned} A_l^{(l-1)}(-1) = \dots = & A_l^{(l-1)}(-c_l n - 1) = \\ = & A^{(l-1)}(-a_l n - 1) = \dots = A^{(l-1)}(-b_l n - 1) = 0. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Преобразуем левую часть (1.27). Используя замену $m = k - a_l n$ и учитывая (1.29) и (1.9), получаем

$$- \sum_{k=b_l n+2}^{+\infty} A^{(l-1)}(-k) t^k = - \sum_{k=a_l n+1}^{+\infty} A^{(l-1)}(-k) t^k =$$
$$= -t^{a_l n} \sum_{k=a_l n+1}^{+\infty} A^{(l-1)}(-k) t^{k - a_l n} =$$
$$= -t^{a_l n} \sum_{m=1}^{+\infty} A^{(l-1)}(-m - a_l n) t^m = -t^{a_l n} \sum_{m=1}^{+\infty} A_l^{(l-1)}(-m) t^m.$$

Тогда по лемме 1 имеем

$$- \sum_{k=b_l n+2}^{+\infty} A^{(l-1)}(-k) t^k = t^{a_l n} \sum_{j=0}^{N-(l-1)} e_j^{(l)} \left(\frac{t}{t-1} \right)^{j+1},$$

$$\text{где } e_j^{(l)} = \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} A_l^{(l-1)}(-k) \binom{j}{k-1}.$$

Из (1.29) следует, что $e_j^{(l)} = 0$ при $j = 1, \ldots, c_l n$. Тогда

$$-\sum_{k=b_l n+2}^{+\infty} A^{(l-1)}(-k)t^k = t^{a_l n} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{c_l n+2} \sum_{j=c_l n+1}^{N-(l-1)} e_j^{(l)} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{j-c_l n-1}.$$

Отсюда заключаем, что справедливо равенство (1.27) при $t \in \mathbb{C}$, $0 < |t| < 1$. Следовательно, доказаны равенства (1.10)–(1.12) при таких $t \in \mathbb{C}$, $0 < |t| < 1$, что выполнены (1.13)–(1.15).

5. Докажем справедливость равенств (1.10)–(1.12) при $t \in \mathbb{C}$, $|t| = 1$. Поскольку можно непрерывно продолжить функции, стоящие в левой и правой части (1.10)–(1.12), до точек $t \in \mathbb{C}$, $|t| = 1$, то получаем требуемое.

Предложение 1 доказано. □

Далее будут получены функциональные свойства $U_1(t), U_2(t), U_3(t)$. Предварительно докажем лемму 2.

Лемма 2. *Пусть $S(t) \in \mathbb{C}(t)$ и известно, что в круге $\{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ выполняется равенство*

$$S(t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} P(-k)t^k, \ \text{где } P(x) \in \mathbb{C}[x].$$

Если $P(x) = P(-x)$, $P(0) = 0$, то $S(t) = -S(1/t)$.
Если $P(x) = -P(-x)$, то $S(t) = S(1/t)$.

Доказательство леммы 2. Многочлен $P(x)$ можно представить в виде

$$P(x) = \sum_{s=1}^{m} v_s P_s(x), \ \text{где}$$
$$P_s(x) = (x-s+1)\ldots(x-1)x^2(x+1)\ldots(x+s-1)$$

в первом случае и

$$P_s(x) = (x-s+1)\ldots(x-1)x(x+1)\ldots(x+s-1)$$

во втором случае для некоторых $v_s \in \mathbb{C}$. Поэтому достаточно проверить утверждение леммы 2 для $P(x) = P_s(x)$. Считаем, что $P(x) = P_s(x)$.

Используя обозначение $R(x) = P(x+s)$ и замену $a = k+s$, получаем, что в круге $\{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ справедливо

$$S(t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} P(-k)t^k = -t^{-s} \sum_{k=-s+1}^{+\infty} P(-k)t^{k+s} = -t^{-s} \sum_{a=1}^{+\infty} R(-a)t^a.$$

Из леммы 1 имеем

$$S(t) = \sum_{j=0}^{2s} h_j \left(\frac{t}{t-1}\right)^{j+1} \text{ \textit{в первом случае} и}$$
$$S(t) = \sum_{j=0}^{2s-1} h_j \left(\frac{t}{t-1}\right)^{j+1} \text{ \textit{во втором случае},}$$
$$\text{где } h_j = \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k-1} R(-k) \binom{j}{k-1}.$$

Рассмотрим *первый случай*. Тогда

$$h_0 = \cdots = h_{2s-2} = 0,\ h_{2s-1} = -(2s-1)!s \text{ и}$$
$$h_{2s} = -(2s-1)!s(2s) + (2s)!(s+1) = (2s-1)!(2s).$$

Отсюда

$$S(t) = t^{-s}(2s-1)!s\left(-\frac{t^{2s}}{(t-1)^{2s}} + 2\frac{t^{2s+1}}{(t-1)^{2s+1}}\right) = (2s-1)!s\frac{t^s + t^{s+1}}{(t-1)^{2s+1}}.$$

Несложно убедиться, что $S(t) = -S(1/t)$.

Рассмотрим *второй случай*. Тогда

$$h_0 = \cdots = h_{2s-2} = 0 \text{ и } h_{2s-1} = (2s-1)!.$$

Отсюда

$$S(t) = t^{-s}(2s-1)!\frac{t^{2s}}{(t-1)^{2s}} = (2s-1)!\frac{t^s}{(t-1)^{2s}}.$$

Несложно убедиться, что $S(t) = S(1/t)$.

Лемма 2 доказана. □

Следствие 1. *Пусть $S(t) \in \mathbb{C}(t)$ и известно, что в круге $\{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ выполняется равенство*

$$S(t) = -t^{-a} \sum_{k=a+1}^{+\infty} P(-k)t^k, \text{ \textit{где} } a \in \mathbb{Z} \text{ \textit{и} } P(x) \in \mathbb{C}[x].$$

Если $P(x) = P(-x-2a), P(-a) = 0,$ *то* $S(t) = -S\left(1/t\right).$
Если $P(x) = -P(-x-2a),$ *то* $S(t) = S\left(1/t\right).$

Доказательство следствия 1. Используя обозначение $R(x) = P(x-a)$ и замену $r = k - a$, получаем, что в круге $\{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ выполняется

$$S(t) = -t^{-a} \sum_{k=a+1}^{+\infty} P(-k)t^k = -\sum_{k=a+1}^{+\infty} P(-k)t^{k-a} = -\sum_{r=1}^{+\infty} R(-r)t^r.$$

Поскольку $R(x) = R(-x)$, $R(0) = 0$ *в первом случай* и $R(x) = -R(-x)$ *во втором случае*, то из леммы 2 получаем требуемое.

Следствие 1 доказано. □

В работах [3], [20] была фактически доказана лемма 3 (см. лемму 3.2 в [3], см. предложение 1 в [20]). В настоящей диссертации будет приведено элементарное доказательство леммы 3.

Лемма 3. *Справедливы равенства*

$$U_1(t) = U_1\left(\frac{1}{t}\right), U_2(t) = -U_2\left(\frac{1}{t}\right), U_3(t) = U_3\left(\frac{1}{t}\right).$$

Доказательство леммы 3. В силу (1.27) имеем

$$U_l(t) = -t^{-\frac{b_1n+2}{2}} \sum_{k=b_1n+2}^{+\infty} A^{(l-1)}(-k)t^k = -t^{-\frac{b_1n+2}{2}} \sum_{k=\frac{b_1n+2}{2}+1}^{+\infty} A^{(l-1)}(-k)t^k.$$

Пользуясь свойством (1.3) многочлена $A(x)$, получаем

$$A(x) = -A(-x-b_1n-2), A'(x) = A'(-x-b_1n-2), A'\left(-\frac{b_1n+2}{2}\right) = 0$$
$$A''(x) = -A''(-x-b_1n-2).$$

На основании следствия 1 заключаем, что справедливо утверждение леммы 3.

Лемма 3 доказана. □

Также в работе [3] можно найти лемму 4 (см. лемму 2.1 в [3]).

Лемма 4. *Пусть* $S(t) \in \mathbb{Q}(t).$
Если $S(t) = S\left(1/t\right),$ *тогда* $S(t) = R\left(t + 1/t\right),$ *где* $R(t) \in \mathbb{Q}(t).$
Если $S(t) = -S\left(1/t\right),$ *тогда* $S(t) = \left(t - 1/t\right) R\left(t + 1/t\right),$ *где* $R(t) \in \mathbb{Q}(t).$

Таким образом, получаем очевидное следствие 2 из лемм 3 и 4.

Следствие 2. *Выполняются равенства*

$$U_1(t) = W_1\left(t+\frac{1}{t}\right), U_2(t) = \left(t-\frac{1}{t}\right)W_2\left(t+\frac{1}{t}\right), U_3(t) = W_3\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

для некоторых $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t) \in \mathbb{Q}(t)$.

1.3 Арифметические свойства $A(x)$

Будем обозначать через $\mathbb{P}$ множество простых чисел, через $\nu_p(f)$ степень вхождения числа $p \in \mathbb{P}$ в разложении числа $f \in \mathbb{Q}$ на простые множители. Введем также обозначение для чисел $p \in \mathbb{P}$, $g \neq 0 \in \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{N}$

$$\nu_{p,a}(g) = \begin{cases} \nu_p(g) - a, & \text{если } \nu_p(g) \geqslant a, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажем лемму 5.

Лемма 5. *Пусть* $p \in \mathbb{P}, a \in \mathbb{N}, g \neq -1, \ldots, -m, \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\nu_{p,a}(g+1) = \sum_{k=a+1}^{+\infty}\left(\left[\frac{g+1}{p^k}\right] - \left[\frac{g}{p^k}\right]\right) \tag{1.30}$$

и

$$\sum_{k=1}^{m}\nu_{p,a}(g+k) = \sum_{k=a+1}^{+\infty}\left(\left[\frac{g+m}{p^k}\right] - \left[\frac{g}{p^k}\right]\right)$$

Доказательство леммы 5. Очевидно, как вторая формула следует из первой. Докажем (1.30). Если $\nu_p(g+1) = n$, то выполняется

$$\left[\frac{g+1}{p^k}\right] = \left[\frac{g}{p^k}\right] + 1, \text{ если } k \leqslant n,$$

или

$$\left[\frac{g+1}{p^k}\right] = \left[\frac{g}{p^k}\right], \text{ если } k \geqslant n+1.$$

То есть правая часть (1.30) равна $n-a$, если $n \geqslant a$, и 0, если $n < a$.

Лемма 5 доказана. $\square$

В исследовании арифметических свойств многочлена $A(x)$ важную роль играет функция

$$\mu(x,y) = \big([x-a_1y]-[x-b_1y]-[c_1y]\big)+ \\ +\big([x-a_2y]-[x-b_2y]-[c_2y]\big)+ \\ +\big([x-a_3y]-[x-b_3y]-[c_3y]\big).$$

Неравенство $\mu(x,y) \geqslant 0$ выполняется при любых x и y ввиду неравенства $[\alpha+\beta] \geqslant [\alpha]+[\beta]$, которое верно для любых α, $\beta \in \mathbb{R}$.
Обозначим через Ω_1 множество таких $0 \leqslant y < 1$, что при любом x выполняется неравенство

$$\mu(x,y) \geqslant 1. \tag{1.31}$$

Также определим множество

$$\Xi_1 = \left\{p \in \mathbb{P} : p > \sqrt{c_1n+1} \text{ и } \left\{\frac{n}{p}\right\} \in \Omega_1\right\}. \tag{1.32}$$

Обозначим через $\mathbb{J}$ множество нулей многочлена $A(x)$ с учетом их кратностей

$$\mathbb{J} = \{a_1n+1,\ldots,b_1n+1; a_2n+1,\ldots,b_2n+1; a_3n+1,\ldots,b_3n+1\}.$$

Обозначим через $\mathbb{J}_k = \mathbb{J}\backslash\{k\}$. Под записью $i \neq j \in \mathbb{J}$ будем подразумевать, что i и j — это два различных элемента из $\mathbb{J}$, возможно, совпадающих численно.
Кроме того, считаем

$$\Lambda = (c_1n+1)(c_2n+1)(c_3n+1). \tag{1.33}$$

Лемма 6. *Пусть $p \in \Xi_1$. Тогда справедливы утверждения.*

1) Для любого $k \in \mathbb{Z}$, $b_1n+1 < k$, верно

$$\nu_p(A(-k)\Lambda) \geqslant \max_{i\neq j\in\mathbb{J}} \{\nu_p\left((j-k)(i-k)\right)\} - 1,$$

$$\nu_p(A(-k)\Lambda) \geqslant \max_{j\in\mathbb{J}_k} \{\nu_p(j-k)\},$$

$$\nu_p(A(-k)\Lambda) \geqslant 1.$$

2) Для любого $k \in \mathbb{Z}$, $b_2n+1 < k \leqslant b_1n+1$, верно

$$\nu_p(A'(-k)\Lambda) \geqslant 0.$$

3) Для любого $k \in \mathbb{Z}$, $b_3n+1 < k \leqslant b_2n+1$, верно

$$\nu_p(A''(-k)\Lambda) \geqslant -1.$$

Доказательство леммы 6. Введем обозначение

$$x = \frac{k-1}{p} \text{ и } y = \left\{\frac{n}{p}\right\}.$$

Здесь $p \in \Xi_1$, то есть $y \in \Omega_1$. Мы будем пользоваться тем, что $\mu(x, y) \geqslant 1$.

1. При $b_1 n + 1 < k$ выполняется

$$A(-k)\Lambda = -\frac{(k-1-a_1n)!}{(k-2-b_1n)!(c_1n)!}\times \\ \times\frac{(k-1-a_2n)!}{(k-2-b_2n)!(c_2n)!}\frac{(k-1-a_3n)!}{(k-2-b_3n)!(c_3n)!}. \tag{1.34}$$

Определим число Σ следующим образом:

$$\Sigma = \sum_{r=2}^{+\infty}\left(\left[\frac{k-1-a_1n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_1n}{p^r}\right] - \left[\frac{c_1n}{p^r}\right] + \right. \\ + \left[\frac{k-1-a_2n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_2n}{p^r}\right] - \left[\frac{c_2n}{p^r}\right] + \\ \left. + \left[\frac{k-1-a_3n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_3n}{p^r}\right] - \left[\frac{c_3n}{p^r}\right]\right) =$$

$$= \sum_{r=2}^{+\infty}\left(\left[\frac{k-1-a_1n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_1n}{p^r}\right] + \right. \\ + \left[\frac{k-1-a_2n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_2n}{p^r}\right] + \\ \left. + \left[\frac{k-1-a_3n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_3n}{p^r}\right]\right) = \\ = \sum_{i\in\mathbb{J}} \nu_{p,1}(k-i) = \sum_{i\in\mathbb{J}_k} \nu_{p,1}(k-i).$$

Второе равенство выполняется из-за того, что $p^2 > c_1n+1$ (см. (1.32)), третье равенство в силу леммы 5, четвертое равенство верно, так как в данном случае $\mathbb{J} = \mathbb{J}_k$. Отсюда получаем неравенства

$$\Sigma \geqslant \max_{i\neq j\in\mathbb{J}} \{\nu_p((i-k)(j-k))\} - 2, \tag{1.35}$$

$$\Sigma \geqslant \max_{j\in\mathbb{J}_k} \{\nu_p(j-k)\} - 1, \tag{1.36}$$

$$\Sigma \geqslant 0, \tag{1.37}$$

так как $\nu_{p,1}(k-i) \geqslant 0$ и $\nu_{p,1}(k-i) \geqslant \nu_p(k-i)-1$.

Тогда выполняется

$$\nu_p(A(-k)\Lambda) = \sum_{r=1}^{+\infty}\Bigg(\left[\frac{k-1-a_1n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_1n}{p^r}\right] - \left[\frac{c_1n}{p^r}\right] + \\ + \left[\frac{k-1-a_2n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_2n}{p^r}\right] - \left[\frac{c_2n}{p^r}\right] + \\ + \left[\frac{k-1-a_3n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_3n}{p^r}\right] - \left[\frac{c_3n}{p^r}\right]\Bigg) \geqslant \\ \geqslant \mu(x,y) + \Sigma \geqslant 1 + \Sigma.$$

Используя неравенства (1.35)–(1.37), получаем требуемое в этом случае.

2. При $b_2n+1 < k \leqslant b_1n+1$ выполняется

$$A'(-k)\Lambda = (-1)^{k-1}\frac{(k-1-a_1n)!(b_1n+1-k)!}{(c_1n)!}\times \\ \times\frac{(k-1-a_2n)!}{(k-2-b_2n)!(c_2n)!}\frac{(k-1-a_3n)!}{(k-2-b_3n)!(c_3n)!}.$$

Далее мы воспользуемся тем, что при нецелом x верно $[x] = -[-x]-1$, а при целом $[x] = -[-x]$. Тогда при b_1n+1-k не кратном p верно

$$\left[\frac{b_1n+1-k}{p}\right] = -\left[\frac{k-1-b_1n}{p}\right] - 1 = -\left[\frac{k-2-b_1n}{p}\right] - 1, \tag{1.38}$$

а при b_1n-k кратном p получаем

$$\left[\frac{b_1n+1-k}{p}\right] = -\left[\frac{k-1-b_1n}{p}\right] = -\left[\frac{k-2-b_1n}{p}\right] - 1. \tag{1.39}$$

Учитывая $p^2 > c_1n+1$ (см. (1.32)), имеем

$$\nu_p(A'(-k)\Lambda) = \left[\frac{k-1-a_1n}{p}\right] + \left[\frac{b_1n+1-k}{p}\right] - \left[\frac{c_1n}{p}\right] + \\ + \left[\frac{k-1-a_2n}{p}\right] - \left[\frac{k-2-b_2n}{p}\right] - \left[\frac{c_2n}{p}\right] + \\ + \left[\frac{k-1-a_3n}{p}\right] - \left[\frac{k-2-b_3n}{p}\right] - \left[\frac{c_3n}{p}\right] =$$

$$= \left[\frac{k-1-a_1n}{p}\right] - \left[\frac{k-2-b_1n}{p}\right] - \left[\frac{c_1n}{p}\right] - 1+$$
$$+ \left[\frac{k-1-a_2n}{p}\right] - \left[\frac{k-2-b_2n}{p}\right] - \left[\frac{c_2n}{p}\right] +$$
$$+ \left[\frac{k-1-a_3n}{p}\right] - \left[\frac{k-2-b_3n}{p}\right] - \left[\frac{c_3n}{p}\right] \geqslant$$
$$\geqslant \mu(x,y) - 1 \geqslant 0.$$

3. При $b_3n+1 < k \leqslant b_2n+1$ выполняется

$$A''(-k)\Lambda = (-1)^{1+a_2n}\frac{(k-1-a_1n)!(b_1n+1-k)!}{(c_1n)!}\times$$
$$\times\frac{(k-1-a_2n)!(b_2n+1-k)!}{(c_2n)!}\frac{(k-1-a_3n)!}{(k-2-b_3n)!(c_3n)!}.$$

Рассуждая точно также, как в (1.38) и (1.39), получаем

$$\left[\frac{b_1n+1-k}{p}\right] = -\left[\frac{k-2-b_1n}{p}\right] - 1 \quad \text{и} \quad \left[\frac{b_2n+1-k}{p}\right] = -\left[\frac{k-2-b_2n}{p}\right] - 1.$$

Тогда имеем

$$\nu_p(A''(-k)\Lambda) = \mu(x,y) - 2 \geqslant -1.$$

Лемма 6 доказана. □

Через d_k будем обозначать наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, k$.

Для любого $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, определим многочлен

$$H_m(x) = \frac{(x+1)\dots(x+m)}{m!}.$$

Лемма 7. *Для любых $k \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, верно, что $d_mH'(k) \in \mathbb{Z}$ и $d_{[m/2]}d_mH''(k) \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство леммы 7. Многочлен $H_m(x)$ — целозначный, тогда многочлен $H_m(x+k)$ — тоже целозначный. Известно, что для любого целозначного многочлена $H(x)$ степени m выполняется

$$H(x) = \sum_{s=0}^{m} a_sH_s(x)$$

для некоторых $a_s \in \mathbb{Z}$. То есть

$$H_m(x+k) = \sum_{s=0}^{m} b_sH_s(x)$$

для некоторых $b_s \in \mathbb{Z}$. Значит, достаточно доказать лемму 7 в случае $k=0$.

Ввиду равенства

$$H'_m(x) = H_m(x)\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x+j}\right)$$

получаем

$$H'_m(0) = H_m(0)\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}.$$

Очевидно, что $d_m H'_m(0) \in \mathbb{Z}$.
Ввиду равенства

$$H''_m(x) = H_m(x)\left(\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant m} \frac{1}{x+i}\cdot\frac{1}{x+j}\right)$$

получаем

$$H''_m(0) = H_m(0)\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant m} \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{j} = \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant m} \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{j}.$$

Нам достаточно доказать то, что для любого $p \in \mathbb{P}$

$$\nu_p\left(\frac{d_{[m/2]}d_m}{ij}\right) \geqslant 0, \tag{1.40}$$

где $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$.

Рассмотрим два возможных случая.

1) Выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\nu_p(i) \leqslant \nu_p(d_{[m/2]}) \quad \text{или} \quad \nu_p(j) \leqslant \nu_p(d_{[m/2]}).$$

Без ограничения общности считаем, что выполнено неравенство для i. Тогда справедливо

$$\nu_p\left(\frac{d_{[m/2]}d_m}{(ij)}\right) = \nu_p(d_{[m/2]}) - \nu_p(i) + \nu_p(d_m) - \nu_p(j) \geqslant 0.$$

2) Выполнены два неравенства

$$\nu_p(i) > \nu_p(d_{[m/2]}) \quad \text{и} \quad \nu_p(j) > \nu_p(d_{[m/2]}).$$

Без ограничения общности считаем, что $i < j$. Тогда

$$\left[\frac{m}{2}\right] \leqslant \frac{m}{2} < p^{\nu_p(d_{[m/2]})+1} = r \leqslant i < j \leqslant m.$$

Так как j делится на $p^{\nu_p(d_{[m/2]})+1}$, то $j \geqslant 2p^{\nu_p(d_{[m/2]})+1} = 2r$. Получили противоречие с тем, что $m/2 < r$ и $2r \leqslant m$. Второй случай не возможен.

То есть для любого $p \in \mathbb{P}$ выполняется (1.40).

Лемма 7 доказана. $\square$

Введем обозначение

$$C = \max\left\{c_2n + 1, \left[\frac{c_1n+1}{2}\right]\right\}. \tag{1.41}$$

Следствие 3. *Для любого* $k \in \mathbb{Z}$

$$d_{c_1n+1}A'(k) \in \mathbb{Z} \text{ и } d_C d_{c_1n+1}A''(k) \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство следствия 3. Ввиду леммы 7 получаем, что

$$\begin{aligned} d_{c_1n+1}A'(k) = \Big(d_{c_1n+1}H'_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big)H_{c_2n+1}(k+a_2n)H_{c_3n+1}(k+a_3n)+\\ + H_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big(d_{c_1n+1}H'_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big)H_{c_3n+1}(k+a_3n)+\\ + H_{c_1n+1}(k+a_1n)H_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big(d_{c_1n+1}H'_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ввиду леммы 7 получаем, что

$$\begin{aligned} d_C d_{c_1n+1}A''(k) &= \\ &= \Big(d_C d_{c_1n+1}H''_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big)H_{c_2n+1}(k+a_2n)H_{c_3n+1}(k+a_3n)+\\ &+ H_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big(d_C d_{c_1n+1}H''_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big)H_{c_3n+1}(k+a_3n)+\\ &+ H_{c_1n+1}(k+a_1n)H_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big(d_C d_{c_1n+1}H''_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big)+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \Big(d_{c_1n+1}H'_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big)\Big(d_C H'_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big)H_{c_3n}(k+a_3n)+\\ &+ \Big(d_{c_1n+1}H'_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big)H_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big(d_C H'_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big)+\\ &+ H_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big(d_{c_1n+1}H'_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big)\Big(d_C H'_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Следствие 3 доказано. $\square$

Введем обозначения

$$\Delta_1 = \prod_{p\in\Xi_1} p, \quad \Delta_1' = \prod_{\substack{p\in\Xi_1\\ p>C}} p, D_1 = \frac{1}{\Delta_1},\ D_2 = \frac{d_{c_1n+1}}{\Delta_1},\ D_3 = d_C\Delta_1'\frac{d_{c_1n+1}}{\Delta_1}. \tag{1.42}$$

Лемма 8. *Для любого $k \in \mathbb{Z}$ верно*

$$A_1 = D_1 A(-k)\Lambda \in \mathbb{Z},\ A_2 = D_2 A'(-k)\Lambda \in \mathbb{Z},\ A_3 = D_3 A''(-k)\Lambda \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство леммы 8. Ввиду следствия 3 и (1.42) достаточно доказать, что для любого $p \in \Xi_1$ верно

$$\nu_p(A_1) \geqslant 0,\ \nu_p(A_2) \geqslant 0,\ \nu_p(A_3) \geqslant 0.$$

Поэтому далее мы считаем, что $p \in \Xi_1$.

Отметим некоторые простые факты, которые мы будем использовать.

1) Для любого $p \in \Xi_1$ верно $p \leqslant b_1 n = c_1 n$. Действительно, так как $\mu(x, y) = 0$ при $y \in [0; 1/b_1)$ и $x = (1 + b_1 y)/2$, то для любого $y \in \Omega_1$ выполняется $1/b_1 \leqslant y$. Значит, что для любого $p \in \Xi_1$ выполняется

$$\frac{n}{p} \geqslant \left\{\frac{n}{p}\right\} \geqslant \frac{1}{b_1},$$

то есть $p \leqslant b_1 n = c_1 n$.

Таким образом, учитывая (1.32) и (1.42), получаем равенства

$$\nu_p(d_{c_1 n+1}) = 1,\ \nu_p(d_C \Delta_1') = 1,\ \nu_p(\Delta_1) = 1. \tag{1.43}$$

2) Для знаменателя несократимой дроби

$$\frac{C(k)}{D(k)} = \sum_{j \in \mathbb{J}_k} \frac{1}{j-k}$$

при $k \in \mathbb{Z}$, $k > b_2 n + 1$, выполняется неравенство

$$\nu_p(D(k)) \leqslant \max_{j \in \mathbb{J}_k} \{\nu_p(j-k)\}. \tag{1.44}$$

Также отметим, что при $k \in \mathbb{Z}$, $b_2 n + 1 < k \leqslant b_1 n + 1$, верно

$$\nu_p(D(k)) \leqslant 1, \tag{1.45}$$

так как $|j - k| < c_1 n + 1 < p^2$.

3) Для знаменателя несократимой дроби

$$\frac{E(k)}{F(k)} = \sum_{i \neq j \in \mathbb{J}} \frac{1}{i-k} \cdot \frac{1}{j-k}$$

при $k \in \mathbb{Z}$, $k > b_1 n + 1$, выполняется неравенство

$$\nu_p(F(k)) \leqslant \max_{i \neq j \in \mathbb{J}} \{\nu_p((i-k)(j-k))\}. \tag{1.46}$$

Теперь перейдем к доказательству.

1. $b_1 n + 1 < k$.

Для A_1 ввиду (1.43) и леммы 6 получаем

$$\nu_p(A_1) = -\nu_p(\Delta_1) + \nu_p(A(-k)\Lambda) \geqslant -1 + 1 = 0.$$

Для A_2 имеем

$$A'(-k) = A(-k)\left(\sum_{j \in \mathbb{J}} \frac{1}{j-k}\right) = A(-k)\left(\sum_{j \in \mathbb{J}_k} \frac{1}{j-k}\right) = A(-k)\frac{C(k)}{D(k)}.$$

Отсюда ввиду (1.43), леммы 6 и (1.44) получаем

$$\nu_p(A_2) \geqslant \nu_p(d_{c_1 n+1}) - \nu_p(\Delta_1) + \nu_p(A(-k)\Lambda) - \nu_p(D(k)) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - 1 + \max_{j \in \mathbb{J}_k} \{\nu_p(j-k)\} - \max_{j \in \mathbb{J}_k} \{\nu_p(j-k)\} = 0.$$

Для A_3 имеем

$$A''(-k) = A(-k)\left(\sum_{i \neq j \in \mathbb{J}} \frac{1}{i-k} \cdot \frac{1}{j-k}\right) = A(-k)\frac{E(k)}{F(k)}.$$

Отсюда ввиду (1.43), леммы 6 и (1.46) получаем

$$\nu_p(A_3) \geqslant \nu_p(d_C \Delta_1') + \nu_p(d_{c_1 n+1}) - \nu_p(\Delta_1) + \nu_p(A(-k)\Lambda) - \nu_p(F(k)) \geqslant$$
$$\geqslant 1 + 1 - 1 + \max_{i \neq j \in \mathbb{J}} \{\nu_p((j-k)(i-k))\} - 1 - \max_{i \neq j \in \mathbb{J}} \{\nu_p((j-k)(i-k))\} = 0.$$

2. $b_2 n + 1 < k \leqslant b_1 n + 1$.

В этом случае $A_1 = 0$.

Для A_2 ввиду (1.43) и леммы 6 получаем

$$\nu_p(A_2) = \nu_p(d_{c_1 n+1}) - \nu_p(\Delta_1) + \nu_p(A'(-k)\Lambda) \geqslant 1 - 1 + 0 = 0.$$

Для A_3 имеем

$$A''(-k) = A'(-k)\left(\sum_{j \in \mathbb{J}_k} \frac{1}{j-k}\right) = A'(-k)\frac{C(k)}{D(k)}.$$

Отсюда ввиду (1.43), леммы 6 и (1.45) получаем

$$\nu_p(A_3) \geqslant \nu_p(d_C\Delta_1') + \nu_p(d_{c_1n+1}) - \nu_p(\Delta_1) + \nu_p(A'(-k)\Lambda) - \nu_p(D(k)) \geqslant$$
$$\geqslant 1 + 1 - 1 + 0 - 1 = 0.$$

3. $b_3n + 1 < k \leqslant b_2n + 1$.
В этом случае $A_1 = A_2 = 0$.
Для A_3 ввиду (1.43) и леммы 6 получаем

$$\nu_p(A_3) = \nu_p(d_C\Delta_1') + \nu_p(d_{c_1n+1}) - \nu_p(\Delta_1) + \nu_p(A''(-k)\Lambda) \geqslant 1 + 1 - 1 - 1 = 0.$$

4. $a_3n + 1 \leqslant k \leqslant b_3n + 1$.
В этом случае $A_1 = A_2 = A_3 = 0$.

5. $k < a_3n + 1$.
Требуемое выполняется ввиду свойства (1.3) многочлена $A(x)$.

Лемма 8 доказана. □

1.4 Арифметические свойства $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$

Будем в $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ в качестве параметра t подставлять следующие значения:

$$\lambda_{k,1} = \frac{k+1-\sqrt{2k+1}}{k}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, k > 0, \tag{1.47}$$

$$\lambda_{k,2} = \frac{k-1-i\sqrt{2k-1}}{k} = e^{-i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2k-1}}{k-1}}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, k > 0. \tag{1.48}$$

Введем обозначения

$$R_{k,n,1} = \begin{cases} m^{-\frac{c_1n+2}{2}}, & \text{если } k = 2m, \\ 2^{\frac{N+1}{2}}k^{-\frac{c_1n+2}{2}}, & \text{если } k = 2m-1, \end{cases}$$

$$R_{k,n,2} = \begin{cases} m^{-\frac{c_2n+2}{2}}, & \text{если } k = 2m, \\ 2^{\frac{N+1}{2}}k^{-\frac{c_2n+2}{2}}, & \text{если } k = 2m-1, \end{cases} \tag{1.49}$$

$$R_{k,n,3} = \begin{cases} m^{-\frac{c_3n+2}{2}}, & \text{если } k = 2m, \\ 2^{\frac{N+1}{2}}k^{-\frac{c_3n+2}{2}}, & \text{если } k = 2m-1. \end{cases} \tag{1.50}$$

Лемма 9. *Для любого $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$, справедливы утверждения.*

1. $$Y_{k,1,1} = R_{k,n,1} D_1 U_1(\lambda_{k,1})\Lambda \in \mathbb{Z}, Y_{k,1,2} = R_{k,n,2} D_2 U_2(\lambda_{k,1})\Lambda\sqrt{2k+1} \in \mathbb{Z},$$ $$Y_{k,1,3} = R_{k,n,3} D_3 U_3(\lambda_{k,1})\Lambda \in \mathbb{Z}.$$

2. $$Y_{k,2,1} = R_{k,n,1} D_1 U_1(\lambda_{k,2})\Lambda \in \mathbb{Z}, Y_{k,2,2} = R_{k,n,2} D_2 U_2(\lambda_{k,2})\Lambda i\sqrt{2k-1} \in \mathbb{Z},$$ $$Y_{k,2,3} = R_{k,n,3} D_3 U_3(\lambda_{k,2})\Lambda \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство леммы 9. Отметим некоторые простые факты, которые мы будем использовать.
1) Для $\lambda_{k,1}$ выполняется

$$\lambda_{k,1} + \frac{1}{\lambda_{k,1}} = \frac{2k+2}{k} \text{ и } \lambda_{k,1} - \frac{1}{\lambda_{k,1}} = -\frac{2\sqrt{2k+1}}{k}.$$

Отсюда из следствия 2 получаем

$$U_1(\lambda_{k,1}), U_2(\lambda_{k,1})\sqrt{2k+1}, U_3(\lambda_{k,1}) \in \mathbb{Q}. \tag{1.51}$$

Обозначим через

$$p_{1,k,1} = \frac{\lambda_{k,1}}{\lambda_{k,1}-1} = \frac{1-\sqrt{2k+1}}{2} \text{ и } p_{2,k,1} = \frac{1}{1-\lambda_{k,1}} = \frac{1+\sqrt{2k+1}}{2}$$

корни уравнения $x^2 - x - \frac{k}{2} = 0$.
2) Для $\lambda_{k,2}$ выполняется

$$\lambda_{k,2} + \frac{1}{\lambda_{k,2}} = \frac{2k-2}{k} \text{ и } \lambda_{k,2} - \frac{1}{\lambda_{k,2}} = -\frac{2i\sqrt{2k-1}}{k}.$$

Отсюда из следствия 2 получаем

$$U_1(\lambda_{k,2}), U_2(\lambda_{k,2})i\sqrt{2k-1}, U_3(\lambda_{k,2}) \in \mathbb{Q}. \tag{1.52}$$

Обозначим через

$$p_{1,k,2} = \frac{\lambda_{k,2}}{\lambda_{k,2}-1} = \frac{1+i\sqrt{2k-1}}{2} \text{ и } p_{2,k,2} = \frac{1}{1-\lambda_{k,2}} = \frac{1-i\sqrt{2k-1}}{2}$$

корни уравнения $x^2 - x + \frac{k}{2} = 0$.

Через s будем обозначать любое число из множества $\{1, 2\}$.

Для доказательства леммы 9 достаточно показать, что $Y^2_{k,s,l} \in \mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ — кольцо целых алгебраических чисел. Действительно, если это так, то $Y_{k,s,l}$ — целое алгебраическое. Из (1.51)—(1.52) получаем, что $Y_{k,s,l} \in \mathbb{Q}$. Следовательно, $Y_{k,s,l} \in \mathbb{Z}$.

Из леммы 8 следует (здесь мы используем определения (1.9) многочленов $A_l(x)$ и соотношения для $e_j^{(l)}$ из предложения 1)

$$D_l A_l^{(l-1)}(k)\Lambda \in \mathbb{Z}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \text{ то есть } D_l e_j^{(l)}\Lambda \in \mathbb{Z}. \tag{1.53}$$

Из предложения 1 и леммы 3 мы получаем

$$\begin{aligned} -\left(U_2(\lambda_{k,s})\right)^2 = U_2(\lambda_{k,s}) U_2\left(\frac{1}{\lambda_{k,s}}\right) = \\ = (p_{1,k,s}p_{2,k,s})^{c_2n+2} \sum_{j=c_2n+1}^{N-1} e_j^{(2)} p_{1,k,s}^{j-c_2n-1} \sum_{j=c_2n+1}^{N-1} e_j^{(2)} p_{2,k,s}^{j-c_2n-1} = \\ = (q_{k,s})^{c_2n+2} \sum_{j=c_2n+1}^{N-1} e_j^{(2)} p_{1,k,s}^{j-c_2n-1} \sum_{j=c_2n+1}^{N-1} e_j^{(2)} p_{2,k,s}^{j-c_2n-1}, \end{aligned} \tag{1.54}$$

здесь

$$q_{k,s} = p_{1,k,s}p_{2,k,s} = \begin{cases} -\dfrac{k}{2}, & \text{если } s = 1, \\ \dfrac{k}{2}, & \text{если } s = 2. \end{cases}$$

Аналогичным образом выводятся равенства

$$\left(U_1(\lambda_{k,s})\right)^2 = (q_{k,s})^{c_1n+2} \sum_{j=c_1n+1}^{N} e_j^{(1)} p_{1,k,s}^{j-c_1n-1} \sum_{j=c_1n+1}^{N} e_j^{(1)} p_{2,k,s}^{j-c_1n-1}, \tag{1.55}$$

$$\left(U_3(\lambda_{k,s})\right)^2 = (q_{k,s})^{c_3n+2} \sum_{j=c_3n+1}^{N-2} e_j^{(3)} p_{1,k,s}^{j-c_3n-1} \sum_{j=c_3n+1}^{N-2} e_j^{(3)} p_{2,k,s}^{j-c_3n-1}. \tag{1.56}$$

Остается разобрать несколько случаев.

1. $k = 2m$.

При любом $L \in \mathbb{Z}$, $L \geqslant 0$, выполняется $p_{i,k,s}^L \in \mathbb{K}$, где $i = 1, 2$, так как $p_{i,k,s} \in \mathbb{K}$. Тогда из (1.53) и (1.54)–(1.56) получаем

$$Y^2_{k,s,l} = \left(\sum_{j=c_ln+1}^{N-l+1} \left(D_l e_j^{(l)}\Lambda\right) p_{1,k,s}^{j-c_ln-1}\right) \left(\sum_{j=c_ln+1}^{N-l+1} \left(D_l e_j^{(l)}\Lambda\right) p_{2,k,s}^{j-c_ln-1}\right) y_{k,s,l} \in \mathbb{K},$$

где

$$y_{k,s,1} = y_{k,s,3} = 1, \quad y_{k,s,2} = \begin{cases} -(2k+1), \text{ если } s = 1, \\ \ (2k-1), \text{ если } s = 2. \end{cases}$$

2. $k = 2m - 1$.

При любом $L \in \mathbb{Z}$, $L \geqslant 0$, выполняется $2^{\left[\frac{L+1}{2}\right]} p_{i,k,s}^L \in \mathbb{K}$, где $i = 1, 2$, так как

$$(p_{i,k,1})^{2L} = \left(\frac{k+1 \mp \sqrt{2k+1}}{2}\right)^L \text{ и } (p_{i,k,1})^{2L+1} = \frac{1 \mp \sqrt{2k+1}}{2}(p_{i,k,1})^{2L}$$

или

$$(p_{i,k,2})^{2L} = \left(\frac{-k+1 \pm i\sqrt{2k-1}}{2}\right)^L \text{ и } (p_{i,k,2})^{2L+1} = \frac{1 \pm i\sqrt{2k-1}}{2}(p_{i,k,2})^{2L}.$$

Тогда из (1.53) и (1.54)–(1.56) получаем

$$Y_{k,s,l}^2 = \left(\sum_{j=c_l n+1}^{N-l+1} \left(D_l e_j^{(l)} \Lambda\right) 2^{\frac{N-c_l n-1}{2}} p_{1,k,s}^{j-c_l n-1}\right) \times$$
$$\times \left(\sum_{j=c_l n+1}^{N-l+1} \left(D_l e_j^{(l)} \Lambda\right) 2^{\frac{N-c_l n-1}{2}} p_{2,k,s}^{j-c_l n-1}\right) y_{k,s,l} \in \mathbb{K}.$$

Лемма 9 доказана. □

1.5 Асимптотика $U_1(\psi)$

Будем подставлять в качестве параметра t в $U_1(t)$ число $\psi \in (0;1)$.

Определим функцию

$$h(z) = \ln\left(\frac{(z+b_1)^{b_1}(z+b_2)^{b_2}(z+b_3)^{b_3}}{(-z-a_1)^{a_1}(-z-a_2)^{a_2}(-z-a_3)^{a_3} c_1^{c_1} c_2^{c_2} c_3^{c_3}}\right)$$

и уравнение

$$\frac{(z+b_1)(z+b_2)(z+b_3)}{(-z-a_1)(-z-a_2)(-z-a_3)} = -\psi. \tag{1.57}$$

В предложении 2 определяется функция $M(\psi)$.

Предложение 2. *Если $z_{1,\psi} < -b_1$ — корень уравнения (1.57), то имеет место равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|U_1(\psi)| = \operatorname{Re} h(z_{1,\psi}) - \frac{b_1}{2}\ln\psi = M(\psi).$$

Доказательство предложения 2. Так как $U_1(t)$ отличается от $V_1(t)$ множителем $t^{-\frac{b_1 n+2}{2}}$ (см. определение $V_1(t)$ в формулировке предложения 1), то достаточно доказать

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|V_1(\psi)| = \operatorname{Re} h(z_{1,\psi}).$$

Из равенства (1.27) получаем

$$V_1(\psi) = -\sum_{k=b_1n+2}^{+\infty} A(-k)\psi^k = -\sum_{k=b_1n+2}^{+\infty}\frac{B(k)}{k^2},\ \text{где}\ B(k) = A(-k)\psi^k k^2.$$

Пользуясь формулой (1.34) для $A(-k)$, имеем

$$\delta(k) = \frac{B(k+1)}{B(k)} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^2\frac{\psi(k-a_1n)(k-a_2n)(k-a_3n)}{(k-1-b_1n)(k-1-b_2n)(k-1-b_3n)}.$$

Рассмотрим функцию

$$s(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^2\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(x-(b_1+1))(x-(b_2+1))(x-(b_3+1))}.$$

Тогда $s(x)\to 1$ при $x\to+\infty$. Значит, существует целое $x_0 > b_1+1$, что для любого $x \geqslant x_0$ верно

$$s(x) < \psi^{-1},$$

так как $\psi^{-1} > 1$. Следовательно, $\delta(k) < 1$ при $k \geqslant nx_0$, то есть последовательность $B(k)$ убывает при $k \geqslant nx_0$. Значит,

$$M = \max_{b_1n+2\leqslant k}|B(k)| = \max_{b_1n+2\leqslant k\leqslant x_0n}|B(k)|.$$

Оценим $\ln M$ сверху. Считаем, что $b_1 n < k \leqslant x_0 n$. Используя формулу Стирлинга (см. §12.31 в [14])

$$\begin{gathered}\ln\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + r(z),\\ \text{где}\ |r(z)| < \frac{c}{\operatorname{Re} z},\ c>0 \text{ — абсолютная константа},\\ \ln\Gamma(1)=0, \ln z = \ln|z| + i\arg z\ \text{и}\ |\arg z| < \frac{\pi}{2},\end{gathered}\tag{1.58}$$

и обозначение $\varsigma = k/n$, получаем

$$\ln|B(k)| = nf(\varsigma) + O(\ln n),\ \text{где}$$

$$f(\varsigma) = \ln \frac{(\varsigma - a_1)^{\varsigma - a_1}(\varsigma - a_2)^{\varsigma - a_2}(\varsigma - a_3)^{\varsigma - a_3}\psi^{\varsigma}}{(\varsigma - b_1)^{\varsigma - b_1}(\varsigma - b_2)^{\varsigma - b_2}(\varsigma - b_3)^{\varsigma - b_3} c_1^{c_1} c_2^{c_2} c_3^{c_3}}. \tag{1.59}$$

Рассмотрим уравнение $f'(z) = 0$, то есть

$$\frac{\psi(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)}{(z - b_1)(z - b_2)(z - b_3)} = 1. \tag{1.60}$$

Несложно понять, что у уравнения (1.60) есть только один корень $z'_{1,\psi}$, больший b_1. Очевидно, что функция $f(\varsigma)$ принимает наибольшее значение в точке $z'_{1,\psi}$ при $\varsigma > b_1$. Отсюда получаем, что выполняется неравенство

$$\ln M \leqslant n f(z'_{1,\psi}) + O(\ln n).$$

Оценим $\ln M$ снизу. Для этого рассмотрим число $r = [z'_{1,\psi} n]$. Тогда

$$\left| z'_{1,\psi} - \frac{r}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Откуда

$$f\left(\frac{r}{n}\right) = f(z'_{1,\psi}) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Значит,

$$\ln |B(r)| = n f(z'_{1,\psi}) + O(\ln n).$$

То есть

$$\ln M = n f(z'_{1,\psi}) + O(\ln n).$$

Таким образом, ввиду оценок

$$M \frac{1}{(x_0 n)^2} < |V_1(\psi)| < M \sum_{k=b_1 n+2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < M \frac{\pi^2}{6}$$

получаем

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln |V_1(\psi)| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln M = f(z'_{1,\psi}).$$

Пользуясь (1.60), несложно убедиться, что $-z'_{1,\psi}$ является корнем (1.57) и $-z'_{1,\psi} < -b_1$. Значит, $-z'_{1,\psi} = z_{1,\psi}$. Следовательно, учитывая (1.59) и (1.60), получаем

$$f(z'_{1,\psi}) = \operatorname{Re} h(z_{1,\psi}).$$

Предложение 2 доказано. $\square$

1.6 Асимптотические свойства $J_3(\psi)$

Будем подставлять в качестве параметра t в $J_3(t)$ число $\psi \in (0;1)$.

В предложении 3 определяется функция $m(\psi)$.

Предложение 3. *Если* $z_{2,\psi} = d_3 + i\mu$ *— такой корень уравнения (1.57), что* $-b_3 < d_3 < -a_3$ *и* $\mu > 0$, *тогда справедлива оценка*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}|J_3(\psi)| \leqslant \operatorname{Re} h(z_{2,\psi}) - \frac{b_1}{2}\ln\psi = m(\psi).$$

Доказательство предложения 3. Так как $J_3(t)$ отличается от $I_3(t)$ множителем $t^{-\frac{b_1 n+2}{2}}$ (см. (1.4)), то достаточно доказать

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln|I_3(\psi)| \leqslant \operatorname{Re} h(z_{2,\psi}).$$

Выберем в качестве контура L_3 вертикальную прямую

$$L_3 = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = nd_3 + iy, -\infty < y < +\infty\}.$$

Используя свойства гамма-функции (см. § 12.12, §12.14 в [14])

$$\Gamma(\zeta)\Gamma(1-\zeta) = \frac{\pi}{\sin\pi\zeta} \text{ и } \Gamma(\zeta+1) = \zeta\Gamma(\zeta), \tag{1.61}$$

получаем

$$\Psi_3(\zeta) = (-1)^{a_1n+a_2n+a_3n+1}\frac{\Gamma(\zeta+b_1n+2)\Gamma(-\zeta-a_1n)}{\Gamma(c_1n+2)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\zeta+b_2n+2)\Gamma(-\zeta-a_2n)}{\Gamma(c_2n+2)}\frac{\Gamma(\zeta+b_3n+2)\Gamma(-\zeta-a_3n)}{\Gamma(c_3n+2)}e^{-\zeta\ln\psi-\zeta\pi i}.$$

Введем обозначение $\zeta = zn$. Отметим, что в последующих выражениях константа в $O\left(n^{-1}\right)$ не зависят от z. На основании формулы (1.58) Стирлинга и равенств

$$\operatorname{Re}^{-1}(\zeta+b_in+2) = O\left(n^{-1}\right) > 0,\ \operatorname{Re}^{-1}(-\zeta-a_in) = O\left(n^{-1}\right) > 0,\ \text{где } i \in \{1,2,3\},$$

при $\zeta \in L_3$, получаем

$$\Psi_3(\zeta) = \varphi_3(z)e^{nf_3(z)},$$

где

$$\begin{aligned}f_3(z) = (z+b_1)\ln(z+b_1) - (z+a_1)\ln(-z-a_1)+\\ +(z+b_2)\ln(z+b_2) - (z+a_2)\ln(-z-a_2)+\\ +(z+b_3)\ln(z+b_3) - (z+a_3)\ln(-z-a_3)-\\ -\ln c_1^{c_1}c_2^{c_2}c_3^{c_3} - z\ln\psi - z\pi i\end{aligned} \tag{1.62}$$

и

$$\varphi_3(z) = (-1)^{(a_1+a_2+a_3)n+1}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^3 \frac{(z+b_1)^3(z+b_2)^3(z+b_3)^3}{(-z-a_1)(-z-a_2)(-z-a_3)c_1^3c_2^3c_3^3}}\times \\ \times\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right).$$

Совершим замену $\zeta = nz = n(d_3+iy)$, тогда

$$I_3(\psi) = \frac{n}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_3(d_3+iy)e^{nf_3(d_3+iy)}dy.$$

Пусть $q_3(y) = \operatorname{Re} f_3(z)$, тогда

$$\begin{aligned}q_3'(y) = -\operatorname{Im}\left[\frac{\partial f_3}{\partial x}\right] = -\operatorname{Im}\left[\frac{\partial f_3}{\partial z}\right] =\\ = -\operatorname{Im}[\ln(z+b_1)+\ln(z+b_2)+\ln(z+b_3)-\\ -\ln(-z-a_1)-\ln(-z-a_2)-\ln(-z-a_3)-\ln\psi-\pi i] =\end{aligned} \tag{1.63}$$

$$= -\arg(z+b_1)-\arg(z+b_2)-\arg(z+b_3)+ \\ +\arg(-z-a_1)+\arg(-z-a_2)+\arg(-z-a_3)+\pi.$$

Откуда заключаем, что $q_3'(y)$ — убывающая функция, поскольку функции $-\arg(b+di)$ и $\arg(b-di)$ при фиксированном $b>0$ убывают, когда d меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

Так как $z_{2,\psi} = d_3 + i\mu$ — корень уравнения (1.57), то

$$e^{\frac{\partial f_3(z_{2,\psi})}{\partial z}} = \frac{(z_{2,\psi}+b_1)(z_{2,\psi}+b_2)(z_{2,\psi}+b_3)}{(-z_{2,\psi}-a_1)(-z_{2,\psi}-a_2)(-z_{2,\psi}-a_3)(-\psi)} = 1.$$

Значит,

$$\frac{\partial f_3(z_{2,\psi})}{\partial z} = 2\pi k i.$$

Пользуясь (1.63), имеем

$$-\pi < \arg \frac{\partial f_3(z_{2,\psi})}{\partial z} < 6\frac{\pi}{2} - \pi = 2\pi.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} 0 = \frac{\partial f_3(z_{2,\psi})}{\partial z} = \ln(z_{2,\psi} + b_1) + \ln(z_{2,\psi} + b_2) + \ln(z_{2,\psi} + b_3) - \\ - \ln(-z_{2,\psi} - a_1) - \ln(-z_{2,\psi} - a_2) - \ln(-z_{2,\psi} - a_3) - \ln\psi - \pi i. \end{gathered} \tag{1.64}$$

То есть $q_3'(\mu) = 0$. Значит, функция $q_3(y)$ принимает в точке μ наибольшее значение при $y \in \mathbb{R}$.

Учитывая (1.62) и (1.64), получаем

$$q_3(\mu) = \operatorname{Re} f_3(z_{2,\psi}) = \operatorname{Re} h(z_{2,\psi}).$$

Оценим интеграл $I_3(\psi)$. Через C_i будем обозначать некоторые положительные константы.

При $\zeta \in L_3$ и достаточно большом n выполняется неравенство

$$|\varphi_3(z)| \leqslant C_1 y^3 n^{-3/2}.$$

Найдём такое число $\varepsilon_1 > 0$, что $q_3'(\mu + \varepsilon_1) < -1$. Оно существует, так как $q_3'(y) \to -2\pi$ при $y \to +\infty$. Определим интегралы $I_3^1(\psi)$, $I_3^2(\psi)$, $I_3^3(\psi)$ с помощью равенства

$$\begin{gathered} I_3(\psi) = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_3(d_3 + iy) e^{n f_3(d_3+iy)}\, dy + \frac{n}{2\pi} \int\limits_{0}^{\mu+\varepsilon_1} \varphi_3(d_3 + iy) e^{n f_3(d_3+iy)}\, dy + \\ + \frac{n}{2\pi} \int\limits_{\mu+\varepsilon_1}^{+\infty} \varphi_3(d_3 + iy) e^{n f_3(d_3+iy)}\, dy = I_3^1(\psi) + I_3^2(\psi) + I_3^3(\psi). \end{gathered}$$

Оценим $I_3^1(\psi)$, $I_3^2(\psi)$, $I_3^3(\psi)$.

а) Оценка $I_3^1(\psi)$. Так как $q_3'(y)$ — убывающая функция и $q_3'(0) = \pi > 1$, то при $y \leqslant 0$ верно неравенство

$$q_3(y) - q_3(0) = q_3'(\theta) \cdot (y) < y,$$

для некоторого числа $\theta = \theta(y)$, $y \leqslant \theta \leqslant 0$. При достаточно большом n

$$|I_3^1(\psi)| = \left|\frac{n}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_3(d_3+iy)e^{nf_3(d_3+iy)}\,dy\right| \leqslant e^{nq_3(0)}\int\limits_{-\infty}^{0} y^3 e^{n(q_3(y)-q_3(0))}dy \leqslant$$

$$\leqslant e^{nq_3(0)}\int\limits_{-\infty}^{0} y^3 e^{yn}dy < C_2 e^{n\operatorname{Re}h(z_{2,\psi})},$$

так как $q_3(0) < q_3(\mu) = \operatorname{Re}h(z_{2,\psi})$.

b) Оценка $I_3^2(\psi)$. Тогда при достаточно большом n получаем

$$|I_3^2(\psi)| = \left|\frac{n}{2\pi}\int\limits_{0}^{\mu+\varepsilon_1} \varphi_3(d_3+iy)e^{nf_3(d_3+iy)}\,dy\right| \leqslant e^{n\operatorname{Re}h(z_{2,\psi})}.$$

c) Оценка $I_3^3(\psi)$. Так как $q_3'(y)$ — убывающая функция и $q_3'(\mu+\varepsilon_1) < -1$, то при $y \geqslant \mu+\varepsilon_1$ верно неравенство

$$q_3(y) - q_3(\mu+\varepsilon_1) = q_3'(\theta)(y-(\mu+\varepsilon_1)) < -(y-(\mu+\varepsilon_1))$$

для некоторого числа $\theta = \theta(y)$, $\mu+\varepsilon_1 \leqslant \theta \leqslant y$. При достаточно большом n

$$|I_3^3(\psi)| = \left|\frac{n}{2\pi}\int\limits_{\mu+\varepsilon_1}^{+\infty} \varphi_3(d_3+iy)e^{nf_3(d_3+iy)}dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{nq_3(\mu+\varepsilon_1)}\int\limits_{\mu+\varepsilon_1}^{+\infty} y^3 e^{n(q_3(y)-q_3(\mu+\varepsilon_1))}dy \leqslant$$

$$\leqslant e^{nq_3(\mu+\varepsilon_1)}\int\limits_{\mu+\varepsilon_1}^{+\infty} y^3 e^{-(y-(\mu+\varepsilon_1))n}dy < C_3 e^{n\operatorname{Re}h(z_{2,\psi})},$$

так как $q_3(\mu+\varepsilon_1) < q_3(\mu) = \operatorname{Re}h(z_{2,\psi})$.

Отсюда

$$|I_3(\psi)| \leqslant |I_3^1(\psi)| + |I_3^2(\psi)| + |I_3^3(\psi)| \leqslant C_4 e^{n\operatorname{Re}h(z_{2,\psi})}.$$

То есть

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}|I_3(\psi)| \leqslant \operatorname{Re}h(z_{2,\psi}).$$

Предложения 3 доказано. $\square$

1.7 Оценки показателей иррациональности α_k

Получены оценки сверху показателей иррациональности чисел

$$\alpha_k = \sqrt{2k+1}\ln\frac{k+1-\sqrt{2k+1}}{k}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, k > 2.$$

Теорема 1. *Справедливы оценки.*

k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$
3	$6,64610\ldots$	9	$5,23162\ldots$	14	$3,42052\ldots$	19	$4,75667\ldots$
5	$5,82337\ldots$	10	$3,45355\ldots$	15	$4,88401\ldots$	20	$3,39024\ldots$
6	$3,51433\ldots$	11	$5,08119\ldots$	16	$3,40866\ldots$		
7	$5,45247\ldots$	12	$3,43506\ldots$	17	$4,81442\ldots$		
8	$3,47833\ldots$	13	$4,97025\ldots$	18	$3,39873\ldots$		

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 основано на лемме 10 (см. утверждение 2.1 в [27]).

Лемма 10. *Пусть $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $l_n = q_n\alpha + p_n$, где $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$ и*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|q_n| = \sigma, \quad \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|l_n| \leqslant -\tau, \quad \sigma, \tau > 0.$$

Тогда

$$\mu(\alpha) \leqslant 1 + \frac{\sigma}{\tau}.$$

Рассмотрим последовательность (см. определение $\lambda_{k,1}$ в (1.47))

$$l_n = R_{k,n,2}D_2\left(-\frac{\mathrm{Im}(J_3(\lambda_{k,1}))}{\pi}\right)\Lambda\sqrt{2k+1} =$$
$$= R_{k,n,2}D_2U_1(\lambda_{k,1})\Lambda\cdot\alpha_k - R_{k,n,2}D_2U_2(\lambda_{k,1})\Lambda\sqrt{2k+1} = q_n\alpha_k + p_n.$$

Из леммы 9 следует, что $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$.
Из предложений 2 и 3 при $\psi = \lambda_{k,1}$ получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|q_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|R_{k,n,2}D_2U_1(\lambda_{k,1})\Lambda| = N_{k,2} + M_2 + M(\lambda_{k,1}),$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|l_n| = \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left|R_{k,n,2}D_2\left(-\frac{\mathrm{Im}(J_3(\lambda_{k,1}))}{\pi}\right)\Lambda\sqrt{2k+1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant N_{k,2} + M_2 + m(\lambda_{k,1}).$$

Здесь (см. (1.49), (1.42))

$$N_{k,2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(R_{k,n,2}) = \begin{cases} -\dfrac{c_2}{2} \ln m, & \text{если } k = 2m, \\ -\dfrac{c_2}{2} \ln k + \dfrac{c_1 + c_2 + c_3}{2} \ln 2, & \text{если } k = 2m-1, \end{cases}$$

$$M_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln D_2.$$

Если $N_{k,2} + M_2 + m(\lambda_{k,1}) < 0$, то по лемме 10

$$\mu\left(\alpha_k\right) \leqslant 1 - \frac{N_{k,2} + M_2 + M(\lambda_{k,1})}{N_{k,2} + M_2 + m(\lambda_{k,1})}. \tag{1.65}$$

Далее укажем значения параметров и приведем вычисления, из которых следуют оценки, предложенные в формулировке теоремы 1.

Чтобы оценить $\mu(\alpha_k)$, где $k = 3, 5, 6, \ldots, 20$, выберем параметры

$$a_2 = 2, a_3 = 4, b_1 = 14.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда (см. (1.31))

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{12}; \frac{3}{14}\right) \bigcup \left[\frac{1}{4}; \frac{5}{14}\right) \bigcup \left[\frac{3}{8}; \frac{3}{7}\right) \bigcup \left[\frac{7}{12}; \frac{5}{7}\right) \bigcup \left[\frac{3}{4}; \frac{6}{7}\right) \bigcup \left[\frac{7}{8}; \frac{13}{14}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера.

Для того, чтобы вычислить M_2 мы воспользуемся леммой 6 из [10].

Лемма 11. *Пусть u, v - действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < u < v < 1$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{u \leq \left\{\frac{n}{p}\right\} < v} \ln p = \psi(v) - \psi(u),$$

где $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ — логарифмическая производная гамма-функции, а суммирование ведется по всем простым числам p, с условием, что дробная часть $\left\{\frac{n}{p}\right\}$ удовлетворяет неравенству, указанному под знаком суммы.

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_2 = 14 - \left(\psi\left(\frac{3}{14}\right) - \psi\left(\frac{1}{12}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{13}{14}\right) - \psi\left(\frac{7}{8}\right)\right) = 4{,}00979\ldots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 3, 5, 6, \ldots, 20$ величины $m(\lambda_{k,1})$, $M(\lambda_{k,1})$, $N_{k,2}$, оценки сверху $\mu(\alpha_k)$, получающиеся из (1.65).

k	$m(\lambda_{k,1})$	$M(\lambda_{k,1})$	$N_{k,2}$	$\mu(\alpha_k) \leqslant$
3	$-17,23457\ldots$	$38,06524\ldots$	$\ln 2^{15} - \ln 3^5$	$6,64610\ldots$
5	$-17,10508\ldots$	$45,46863\ldots$	$\ln 2^{15} - \ln 5^5$	$5,82337\ldots$
6	$-17,07179\ldots$	$48,13687\ldots$	$-\ln 3^5$	$3,51433\ldots$
7	$-17,04777\ldots$	$50,40109\ldots$	$\ln 2^{15} - \ln 7^5$	$5,45247\ldots$
8	$-17,02962\ldots$	$52,36777\ldots$	$-\ln 4^5$	$3,47833\ldots$
9	$-17,01543\ldots$	$54,10613\ldots$	$\ln 2^{15} - \ln 9^5$	$5,23162\ldots$
10	$-17,00403\ldots$	$55,66373\ldots$	$-\ln 5^5$	$3,45355\ldots$
11	$-16,99466\ldots$	$57,07466\ldots$	$\ln 2^{15} - \ln 11^5$	$5,08119\ldots$
12	$-16,98684\ldots$	$58,36417\ldots$	$-\ln 6^5$	$3,43506\ldots$
13	$-16,98020\ldots$	$59,55153\ldots$	$\ln 2^{15} - \ln 13^5$	$4,97025\ldots$
14	$-16,97449\ldots$	$60,65175\ldots$	$-\ln 7^5$	$3,42052\ldots$
15	$-16,96954\ldots$	$61,67674\ldots$	$\ln 2^{15} - \ln 15^5$	$4,88401\ldots$
16	$-16,96520\ldots$	$62,63613\ldots$	$-\ln 8^5$	$3,40866\ldots$
17	$-16,96136\ldots$	$63,53783\ldots$	$\ln 2^{15} - \ln 17^5$	$4,81442\ldots$
18	$-16,95795\ldots$	$64,38838\ldots$	$-\ln 9^5$	$3,39873\ldots$
19	$-16,95489\ldots$	$65,19328\ldots$	$\ln 2^{15} - \ln 19^5$	$4,75667\ldots$
20	$-16,95214\ldots$	$65,95717\ldots$	$-\ln 10^5$	$3,39024\ldots$

Теорема 1 доказана. □

Замечание. Доказана формула (1.65) для оценок показателей иррациональности α_k, где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$.

1.8 Оценки квадратичных показателей иррациональности α_k

Получены оценки сверху квадратичных показателей иррациональности чисел

$$\alpha_k = \sqrt{2k+1}\ln\frac{k+1-\sqrt{2k+1}}{k}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, k > 10.$$

Теорема 2. *Справедливы оценки.*

k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
11	*297,68074...*	*15*	*50,60816 ...*	*19*	*31,98452...*
12	*9,46081...*	*16*	*8,71172...*	*20*	*8,23651...*
13	*80,82763...*	*17*	*38,51000...*		
14	*9,04083...*	*18*	*8,45082...*		

Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы 2 основано на лемме 12 (см. лемму 2.3 в [28]).

Лемма 12. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, α не является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, $l_n = q_n\alpha + p_n$, $m_n = q_n\alpha^2 + r_n$ где q_n, p_n, $r_n \in \mathbb{Z}$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|q_n| = \sigma, \quad \max\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|l_n|, \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|m_n|\} \leq -\tau, \quad \sigma, \tau > 0.$$

Тогда

$$\mu_2(\alpha) \leqslant 1 + \frac{\sigma}{\tau}.$$

Рассмотрим последовательности (см. определение $\lambda_{k,1}$ в (1.47))

$$l_n = R_{k,n,3}D_3 \left(-\frac{\operatorname{Im}(J_3(\lambda_{k,1}))}{\pi}\right) \Lambda\sqrt{2k+1} =$$
$$= R_{k,n,3}D_3U_1(\lambda_{k,1})\Lambda \cdot \alpha_k - R_{k,n,3}D_3U_2(\lambda_{k,1})\sqrt{2k+1} = q_n\alpha_k + p_n,$$

$$m_n = R_{k,n,3}D_3 \left(2\operatorname{Re}(J_3(\lambda_{k,1})) - 2\frac{\operatorname{Im}(J_3(\lambda_{k,1}))}{\pi} \ln\lambda_{k,1}\right) (2k+1)\Lambda =$$
$$= R_{k,n,3}D_3U_1(\lambda_{k,1})\Lambda \cdot \alpha_k^2 - R_{k,n,3}D_3U_3(\lambda_{k,1})\Lambda(2k+1) = q_n\alpha_k^2 + r_n.$$

Из леммы 9 следует, что q_n, p_n, $r_n \in \mathbb{Z}$.
Из предложений 2 и 3 при $\psi = \lambda_{k,1}$ получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|q_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|R_{k,n,3}D_3U_1(\lambda_{k,1})\Lambda| = N_{k,3} + M_3 + M(\lambda_{k,1}),$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|l_n| = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\left|R_{k,n,3}D_3 \left(-\frac{\operatorname{Im}(J_3(\lambda_{k,1}))}{\pi}\right) \Lambda\sqrt{2k+1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant N_{k,3} + M_3 + m(\lambda_{k,1}),$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|m_n| =$$
$$= \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left|R_{k,n,3}D_3(2k+1)\Lambda\left(2\operatorname{Re}(J_3(\lambda_{k,1})) - 2\frac{\operatorname{Im}(J_3(\lambda_{k,1}))}{\pi}\ln\lambda_{k,1}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant N_{k,3} + M_3 + m(\lambda_{k,1}).$$

Здесь (см. (1.50), (1.42))

$$N_{k,3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(R_{k,n,3}) = \begin{cases} -\dfrac{c_3}{2}\ln m, & \text{если } k = 2m, \\ -\dfrac{c_3}{2}\ln k + \dfrac{c_1+c_2+c_3}{2}\ln 2, & \text{если } k = 2m-1, \end{cases}$$

$$M_3 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln D_3.$$

Если $N_{k,3} + M_3 + m(\lambda_{k,1}) < 0$, то по лемме 12

$$\mu_2(\alpha_k) \leqslant 1 - \frac{N_{k,3} + M_3 + M(\lambda_{k,1})}{N_{k,3} + M_3 + m(\lambda_{k,1})}. \tag{1.66}$$

Далее укажем значения параметров и приведем вычисления, из которых следуют оценки, предложенные в формулировке теоремы 2.

Чтобы оценить $\mu_2(\alpha_k)$, где $k = 11$, выберем параметры

$$a_2 = 10, a_3 = 20, b_1 = 162.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда (см. (1.31))

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{152}; \frac{1}{122}\right) \bigcup \left[\frac{1}{76}; \frac{1}{61}\right) \bigcup \cdots \bigcup \left[\frac{131}{132}; \frac{161}{162}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C\Delta_1' = d_{152n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 162 + 152 - \left(\psi\left(\frac{1}{122}\right) - \psi\left(\frac{1}{152}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{161}{162}\right) - \psi\left(\frac{131}{132}\right)\right) =$$
$$= 213,16267\ldots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 11$ величины $m(\lambda_{k,1})$, $M(\lambda_{k,1})$, $N_{k,3}$, оценка сверху $\mu_2(\alpha_k)$, получающаяся из (1.66).

k	$m(\lambda_{k,1})$	$M(\lambda_{k,1})$	$N_{k,3}$	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
11	$-236,11651\ldots$	$831,10142\ldots$	$\ln 2^{213} - \ln 11^{61}$	$297,68074\ldots$

Чтобы оценить $\mu_2(\alpha_k)$, где $k = 12$, выберем параметры

$$a_2 = 2, a_3 = 4, b_1 = 26.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда (см. (1.31))

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{24}; \frac{1}{18}\right) \bigcup \left[\frac{1}{12}; \frac{1}{9}\right) \bigcup \cdots \bigcup \left[\frac{19}{20}; \frac{25}{26}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C \Delta_1' = d_{24n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 26 + 24 - \left(\psi\left(\frac{1}{18}\right) - \psi\left(\frac{1}{24}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{25}{26}\right) - \psi\left(\frac{19}{20}\right)\right) = \\ = 35,01150\ldots.$$

Приведем таблицу, в которых указаны для $k = 12$ величины $m(\lambda_{k,1})$, $M(\lambda_{k,1})$, $N_{k,3}$, оценка сверху $\mu_2(\alpha_k)$, получающаяся из (1.66).

k	$m(\lambda_{k,1})$	$M(\lambda_{k,1})$	$N_{k,3}$	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
12	$-36,63677\ldots$	$131,30307$	$-\ln 6^9$	$9,46081\ldots$

Чтобы оценить $\mu_2(\alpha_k)$, где $k = 13$, выберем параметры

$$a_2 = 4, a_3 = 8, b_1 = 70.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда (см. (1.31))

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{66}; \frac{1}{54}\right) \bigcup \left[\frac{1}{33}; \frac{1}{27}\right) \bigcup \cdots \bigcup \left[\frac{57}{58}; \frac{69}{70}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C \Delta_1' = d_{66n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 70 + 66 - \left(\psi\left(\frac{1}{54}\right) - \psi\left(\frac{1}{66}\right) + \dots + \psi\left(\frac{69}{70}\right) - \psi\left(\frac{57}{58}\right)\right) = \\ = 101,78597\dots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 13$ величины $m(\lambda_{k,1})$, $M(\lambda_{k,1})$, $N_{k,3}$, оценка сверху $\mu_2(\alpha_k)$, получающаяся из (1.66).

k	$m(\lambda_{k,1})$	$M(\lambda_{k,1})$	$N_{k,3}$	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
13	$-102,95061\dots$	$378,42502\dots$	$\ln 2^{93} - \ln 13^{27}$	$80,82763\dots$

Чтобы оценить $\mu_2(\alpha_k)$, где $k = 14$, выберем параметры

$$a_2 = 2, a_3 = 4, b_1 = 30.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда (см. (1.31))

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{28}; \frac{1}{22}\right) \bigcup \left[\frac{1}{14}; \frac{1}{11}\right) \bigcup \dots \bigcup \left[\frac{23}{24}; \frac{29}{30}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C \Delta_1' = d_{28n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 30 + 28 - \left(\psi\left(\frac{1}{22}\right) - \psi\left(\frac{1}{28}\right) + \dots + \psi\left(\frac{29}{30}\right) - \psi\left(\frac{23}{24}\right)\right) = \\ = 41,98064\dots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 14$ величины $m(\lambda_{k,1})$, $M(\lambda_{k,1})$, $N_{k,3}$, оценка сверху $\mu_2(\alpha_k)$, получающаяся из (1.66).

k	$m(\lambda_{k,1})$	$M(\lambda_{k,1})$	$N_{k,3}$	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
14	$-43,20326\dots$	$161,36934\dots$	$-\ln 7^{11}$	$9,04083\dots$

Чтобы оценить $\mu_2(\alpha_k)$, где $k=15$, выберем параметры

$$a_2=8, a_3=16, b_1=140.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i=1,2,3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда (см. (1.31))

$$\Omega_1=\left[\frac{1}{142};\frac{1}{118}\right)\bigcup\left[\frac{1}{71};\frac{1}{59}\right)\bigcup\cdots\bigcup\left[\frac{125}{126};\frac{149}{150}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C\Delta_1'=d_{142n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3=150+142-\left(\psi\left(\frac{1}{118}\right)-\psi\left(\frac{1}{142}\right)+\cdots+\psi\left(\frac{149}{150}\right)-\psi\left(\frac{125}{126}\right)\right)= \\ =221,60794\ldots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k=15$ величины $m(\lambda_{k,1})$, $M(\lambda_{k,1})$, $N_{k,3}$, оценка сверху $\mu_2(\alpha_k)$, получающаяся из (1.66).

k	$m(\lambda_{k,1})$	$M(\lambda_{k,1})$	$N_{k,3}$	$\mu_2(\alpha_k)\leqslant$
15	$-222,27773\ldots$	$846,67674\ldots$	$\ln 2^{201}-\ln 15^{59}$	$50,60816\ldots$

Чтобы оценить $\mu_2(\alpha_k)$, где $k=16$, выберем параметры

$$a_2=12, a_3=24, b_1=182.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i=1,2,3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда (см. (1.31))

$$\Omega_1=\left[\frac{1}{170};\frac{1}{134}\right)\bigcup\left[\frac{1}{85};\frac{1}{67}\right)\bigcup\cdots\bigcup\left[\frac{145}{146};\frac{181}{182}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C\Delta_1'=d_{170n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 182 + 170 - \left(\psi\left(\frac{1}{134}\right) - \psi\left(\frac{1}{170}\right) + \dots + \psi\left(\frac{181}{182}\right) - \psi\left(\frac{145}{146}\right)\right) =$$
$$= 255,40015\dots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 16$ величины $m(\lambda_{k,1})$, $M(\lambda_{k,1})$, $N_{k,3}$, оценка сверху $\mu_2(\alpha_k)$, получающаяся из (1.66).

k	$m(\lambda_{k,1})$	$M(\lambda_{k,1})$	$N_{k,3}$	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
16	$-262,36716\dots$	$1012,067083\dots$	$-\ln 8^{67}$	$8,71172\dots$

Чтобы оценить $\mu_2(\alpha_k)$, где $k = 17,\ 19$, выберем параметры

$$a_2 = 2, a_3 = 4, b_1 = 38.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда (см. (1.31))

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{36}; \frac{1}{30}\right) \bigcup \left[\frac{1}{18}; \frac{1}{15}\right) \bigcup \dots \bigcup \left[\frac{31}{32}; \frac{37}{38}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C \Delta_1' = d_{36n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 38 + 36 - \left(\psi\left(\frac{1}{30}\right) - \psi\left(\frac{1}{36}\right) + \dots + \psi\left(\frac{37}{38}\right) - \psi\left(\frac{31}{32}\right)\right) =$$
$$= 56,30730\dots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 17, 19$ величины $m(\lambda_{k,1})$, $M(\lambda_{k,1})$, $N_{k,3}$, оценки сверху $\mu_2(\alpha_k)$, получающиеся из (1.66).

k	$m(\lambda_{k,1})$	$M(\lambda_{k,1})$	$N_{k,3}$	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
17	$-56,36642\dots$	$221,16830\dots$	$\ln 2^{51} - \ln 17^{15}$	$38,51000\dots$
19	$-56,34358\dots$	$226,79513\dots$	$\ln 2^{51} - \ln 19^{15}$	$31,98452\dots$

Чтобы оценить $\mu_2(\alpha_k)$, где $k = 18$, выберем параметры

$$a_2 = 8, a_3 = 16, b_1 = 122.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда (см. (1.31))

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{114}; \frac{1}{90}\right) \bigcup \left[\frac{1}{57}; \frac{1}{40}\right) \bigcup \cdots \bigcup \left[\frac{97}{98}; \frac{121}{122}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C \Delta_1' = d_{114n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 122 + 114 - \left(\psi\left(\frac{1}{90}\right) - \psi\left(\frac{1}{114}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{121}{122}\right) - \psi\left(\frac{97}{98}\right)\right) = \\ = 171,44213\ldots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 18$ величины $m(\lambda_{k,1})$, $M(\lambda_{k,1})$, $N_{k,3}$, оценка сверху $\mu_2(\alpha_k)$, получающаяся из (1.66).

k	$m(\lambda_{k,1})$	$M(\lambda_{k,1})$	$N_{k,3}$	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
18	$-175,93117\ldots$	$697,58105\ldots$	$-\ln 9^{45}$	$8,45082\ldots$

Чтобы оценить $\mu_2(\alpha_k)$, где $k = 20$, выберем параметры

$$a_2 = 8, a_3 = 16, b_1 = 126.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда (см. (1.31))

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{118}; \frac{1}{94}\right) \bigcup \left[\frac{1}{59}; \frac{1}{47}\right) \bigcup \cdots \bigcup \left[\frac{101}{102}; \frac{125}{126}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C \Delta_1' = d_{118n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 126 + 118 - \left(\psi\left(\frac{1}{94}\right) - \psi\left(\frac{1}{118}\right) + \dots + \psi\left(\frac{125}{126}\right) - \psi\left(\frac{101}{102}\right)\right) =$$
$$= 178,52161\dots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 20$ величины $m(\lambda_{k,1})$, $M(\lambda_{k,1})$, $N_{k,3}$, оценка сверху $\mu_2(\alpha_k)$, получающаяся из (1.66).

k	$m(\lambda_{k,1})$	$M(\lambda_{k,1})$	$N_{k,3}$	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
20	$-182,45879\dots$	$741,33768\dots$	$-\ln 10^{45}$	$8,23651\dots$

Теорема 2 доказана. □

Замечание. Доказана формула (1.66) для оценок квадратичных показателей иррациональности α_k, где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Более точные оценки для $\mu_2(\alpha_k)$, где $k < 11$, чем те, что получаются из (1.66), приведены в теореме 7.

1.9 Асимптотики $J_1(\gamma)$, $J_2(\gamma)$, $J_3(\gamma)$

Будем подставлять в качестве параметра t в $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ число

$$\gamma \in \mathbb{C}, |\gamma| = 1, -\pi < \arg\gamma < 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{(z+b_1)(z+b_2)(z+b_3)}{(-z-a_1)(-z-a_2)(-z-a_3)} = -\gamma \tag{1.67}$$

и функцию

$$g(y) = \arg(z+b_1) + \arg(z+b_2) + \arg(z+b_3) -$$
$$- \arg(-z-a_1) - \arg(-z-a_2) - \arg(-z-a_3) - \pi - \arg\gamma.$$

Здесь $z = -b_1/2 + iy$ и считаем, что выполняется

$$\arg(z+b_1) = \arg(z+b_2) = \arg(z+b_3) =$$
$$= \arg(-z-a_1) = \arg(-z-a_2) = \arg(-z-a_3) = 0$$

при $z = -b_1/2$.

Уравнение (1.67) имеет ровно три корня и все они лежат на прямой $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -b_1/2\}$. Действительно, в области $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < -b_1/2\}$ выполняются неравенства

$$|z + b_i| < |-z - a_i|, \text{ где } i = 1, 2, 3.$$

Поэтому модуль левой части (1.67) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < -b_1/2\}$ меньше 1. Точно так же доказывается, что модуль левой части (1.67) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -b_1/2\}$ больше 1. Отсюда, учитывая, что $|\gamma| = 1$, заключаем, что все три корня уравнения (1.67) лежат на прямой $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -b_1/2\}$.

Таким образом, $g(y') = 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда $z = -b_1/2 + iy'$ является корнем уравнения (1.67). Поскольку функция $g(y)$ непрерывно возрастает от $-4\pi - \arg\gamma$ до $2\pi - \arg\gamma$, когда y меняется от $-\infty$ до $+\infty$, и $g(0) = -\pi - \arg\gamma < 0$, то получаем, что два корня уравнения (1.67) лежат в верхней полуплоскости, а один в нижней полуплоскости. Это точки

$$z_{1,\gamma} = -\frac{b_1}{2} + iy_{1,\gamma},\ z_{2,\gamma} = -\frac{b_1}{2} + iy_{2,\gamma},\ z_{3,\gamma} = -\frac{b_1}{2} + iy_{3,\gamma},$$

в которых выполняется

$$g(y_{1,\gamma}) = 2\pi,\ g(y_{2,\gamma}) = 0,\ g(y_{3,\gamma}) = -2\pi.$$

Несложно также убедиться, что $y_{1,\gamma} > |y_{3,\gamma}| > y_{2,\gamma} > 0$.

Теперь можно сформулировать предложение, которое говорит об асимптотике интегралов $J_1(\gamma)$, $J_2(\gamma)$, $J_3(\gamma)$.

В предложении 4 определяются функции $M(\gamma)$, $m(\gamma)$.

Предложение 4. *Имеют место равенства*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|J_1(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{1,\gamma}) = M(\gamma),$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|J_2(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{3,\gamma}) = m(\gamma),$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|J_3(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{2,\gamma}).$$

Доказательство предложения 4. Так как $|\gamma| = 1$ и $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ отличаются от $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ множителем $t^{-\frac{b_1 n+2}{2}}$ (см. (1.4)), то нам достаточно доказать

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_1(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{1,\gamma}),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_2(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{3,\gamma}),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_3(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{2,\gamma}).$$

Выберем в качестве контуров L_1, L_2, L_3 вертикальную прямую

$$L = \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = -\frac{b_1 n}{2} + iy, -\infty < y < +\infty\right\}.$$

Также определим два луча

$$L^+ = \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = -\frac{b_1 n}{2} + iy, 0 \leqslant y < +\infty\right\},$$
$$L^- = \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = -\frac{b_1 n}{2} + iy, -\infty < y \leqslant 0\right\}.$$

Асимптотика $I_1(\gamma)$.

Используя свойства (1.61) гамма-функции, получаем

$$\Psi_1(\zeta) = \frac{\Gamma(\zeta + b_1 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_1 n)}{\Gamma(c_1 n + 2)}\frac{\Gamma(\zeta + b_2 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_2 n)}{\Gamma(c_2 n + 2)}\times$$
$$\times \frac{\Gamma(\zeta + b_3 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_3 n)}{\Gamma(c_3 n + 2)}\left(\frac{\sin \pi\zeta}{\pi}\right)^2 \frac{e^{-\zeta\ln\gamma - \zeta\pi i}}{(-1)^{a_1 n + a_2 n + a_3 n + 1}}.$$

Определим $I_1^+(\gamma)$, $I_1^-(\gamma)$ с помощью равенства

$$I_1(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+}\Psi_1(\zeta)d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{L^-}\Psi_1(\zeta)d\zeta = I_1^+(\gamma) + I_1^-(\gamma).$$

Найдем асимптотику интеграла $I_1^+(\gamma)$.

Введем обозначение $\zeta = zn$. Отметим, что в последующих выражениях константа в $O\left(n^{-1}\right)$ не зависят от z. На основании формулы (1.58) Стирлинга и равенств

$$\operatorname{Re}^{-1}(\zeta + b_i n + 2) = O\left(n^{-1}\right) > 0,\ \operatorname{Re}^{-1}(-\zeta - a_i n) = O\left(n^{-1}\right) > 0, i = 1, 2, 3,$$

при $\zeta \in L^+$ получаем

$$\Psi_1(\zeta) = \varphi_{1,+}(z)e^{nf_{1,+}(z)},$$

где

$$f_{1,+}(z)=(z+b_1)\ln(z+b_1)-(z+a_1)\ln(-z-a_1)+\\ +(z+b_2)\ln(z+b_2)-(z+a_2)\ln(-z-a_2)+\\ +(z+b_3)\ln(z+b_3)-(z+a_3)\ln(-z-a_3)-\\ -\ln c_1^{c_1}c_2^{c_2}c_3^{c_3}-z\ln\gamma-3z\pi i \tag{1.68}$$

и

$$\varphi_{1,+}(z)=\sqrt{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^3\frac{(z+b_1)^3(z+b_2)^3(z+b_3)^3}{(-z-a_1)(-z-a_2)(-z-a_3)c_1^3c_2^3c_3^3}}\times\\ \times(-1)^{(a_1+a_2+a_3)n+1}\left(\frac{e^{2z\pi in}-1}{2\pi i}\right)^2\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right). \tag{1.69}$$

Совершим замену $\zeta=nz=n(d_3+iy)$, тогда

$$I_1^+(\gamma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L^+}\Psi_1(\zeta)\,d\zeta=\frac{n}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\varphi_{1,+}(z)e^{nf_{1,+}(z)}\,dy.$$

Пусть $q_{1,+}(y)=\operatorname{Re}f_{1,+}(z)$, тогда

$$q'_{1,+}(y)=-\operatorname{Im}\left[\frac{\partial f_{1,+}}{\partial x}\right]=-\operatorname{Im}\left[\frac{\partial f_{1,+}}{\partial z}\right]=\\ =-\operatorname{Im}[\ln(z+b_1)+\ln(z+b_2)+\ln(z+b_3)-\\ -\ln(-z-a_1)-\ln(-z-a_2)-\ln(-z-a_3)-\ln\gamma-3\pi i]=$$

$$=-(\arg(z+b_1)+\arg(z+b_2)+\arg(z+b_3)-\\ -\arg(-z-a_1)-\arg(-z-a_2)-\arg(-z-a_3)-\arg\gamma-\pi-2\pi)=-(g(y)-2\pi).$$

Откуда заключаем, что $q'_1(y)$ — убывающая функция, поскольку $g(y)$ — возрастающая функция, когда y меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Равенство $q'_{1,+}(y)=0$ возможно, если $g(y)=2\pi$, то есть $y=y_{1,\gamma}$. Значит, функции $q_{1,+}(y)$ принимает в точке $y_{1,\gamma}$ наибольшее значение при $y\in[0;+\infty)$. Так как $z_{1,\gamma}$ — корень уравнения (1.67), то

$$e^{f'_{1,+}(z_{1,\gamma})}=\frac{(z_{1,\gamma}+b_1)(z_{1,\gamma}+b_2)(z_{1,\gamma}+b_3)}{(-z_{1,\gamma}-a_1)(-z_{1,\gamma}-a_2)(-z_{1,\gamma}-a_3)(-\gamma)}=1.$$

Поскольку $0 = q'_{1,+}(y_{1,\gamma}) = -\operatorname{Im} f'_{1,+}(z_{1,\gamma})$, то получаем равенство

$$\begin{gathered} 0 = f'_{1,+}(z_{1,\gamma}) = \ln(z_{1,\gamma}+b_1) + \ln(z_{1,\gamma}+b_2) + \ln(z_{1,\gamma}+b_3) - \\ - \ln(-z_{1,\gamma}-a_1) - \ln(-z_{1,\gamma}-a_2) - \ln(-z_{1,\gamma}-a_3) - 3\pi i - \ln\gamma. \end{gathered} \tag{1.70}$$

При $z = -b_1/2 + iy$ верно разложение

$$\begin{aligned} f_{1,+}(z) = f_{1,+}(z_{1,\gamma}) + \frac{f''_{1,+}(z_{1,\gamma})}{2}(z - z_{1,\gamma})^2 + O\big((z - z_{1,\gamma})^2\big) = \\ = f_{1,+}(z_{1,\gamma}) - \frac{f''_{1,+}(z_{1,\gamma})}{2}(y - y_{1,\gamma})^2 + O\big((y - y_{1,\gamma})^2\big). \end{aligned}$$

При $z = -b_1/2 + iy$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} f''_{1,+}(z) = \left[-\frac{1}{z+a_1} - \frac{1}{z+a_2} - \frac{1}{z+a_3} + \frac{1}{z+b_1} + \frac{1}{z+b_2} + \frac{1}{z+b_3}\right] = \\ = \frac{c_1}{(c_1/2)^2 + y^2} + \frac{c_2}{(c_2/2)^2 + y^2} + \frac{c_3}{(c_3/2)^2 + y^2} > 0. \end{aligned}$$

Для доказательства предложения воспользуемся теоремой 3, которая является некоторой удобной для нас вариацией метода перевала.

Теорема 3. *Пусть даны функции $\varphi_1, f : (a,b) \to \mathbb{C}$, $\varphi_2 : \mathbb{R} \times (a,b) \to \mathbb{C}$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $\zeta \in (a,b)$; известно, что $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(s,x)$, $f(x)$ — измеримые функции при любом $s \geqslant s_1$, где $s_1 \in \mathbb{R}$, причем выполнены условия:*

1) *Для любого $\delta > 0$ выполнено*

$$\sup_{\substack{x \in (a,b) \\ |x-\zeta| > \delta}} \operatorname{Re} f(x) < \operatorname{Re} f(\zeta).$$

2) *В некоторой окрестности точки ζ справедливо разложение*

$$f(x) = f(\zeta) - c_0(x-\zeta)^2 + o\big((x-\zeta)^2\big),$$

где $c_0 \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} c_0 > 0$.

3) *Функция $\varphi_1(x)$ непрерывна в точке ζ, причём $\varphi_1(\zeta) \neq 0$.*

4) *Функция $\varphi_2(s,x)$ при любом $s \geqslant s_1$ непрерывна в точке ζ, причем в некоторой окрестности точки $x = \zeta$ при $s \to +\infty$ выполняется равенство*

$$\varphi_2(s,x) = 1 + O\left(s^{-1}\right),$$

где константа в $O(s^{-1})$ не зависит от x. Также при $s \geqslant s_1$, $x \in (a,b)$ выполнено неравенство $|\varphi_2(s,x)| \leqslant 2$.

5) *Выполнено неравенство*

$$\int\limits_a^b |\varphi_1(x)| e^{s_1 \operatorname{Re} f(x)} dx < \infty.$$

Тогда интеграл $I(s) = \int\limits_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(s,x)e^{sf(x)}dx$ определен при $s \geqslant s_1$, причём

$$I(s) \sim \varphi_1(\zeta)e^{sf(\zeta)}\sqrt{\frac{\pi}{c_0 s}}, \quad s \to +\infty.$$

Замечание. Правая часть асимптотики есть

$$\varphi_1(\zeta)e^{sf(\zeta)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c_0 s x^2}dx.$$

Доказательство. Из условия 1 следует, что $\operatorname{Re} f(x) \leqslant \operatorname{Re} f(\zeta)$, поэтому при $s \geqslant s_1$ имеем

$$|\varphi_1(x)\varphi_2(s,x)e^{sf(x)}| \leqslant 2|\varphi_1(z)|e^{s_1 \operatorname{Re} f(x)} \cdot e^{(s-s_1)\operatorname{Re} f(\zeta)},$$

то есть функция $\varphi_1(x)\varphi_2(s,x)e^{sf(x)}$ мажорируется интегрируемой функцией (первый сомножитель интегрируем по условию 5, второй сомножитель — константа), поэтому интеграл $I(s)$ определен.

Найдем асимптотику $I(s)$. Через C_i будем обозначать положительные константы. Не теряя общности, можно считать, что $\zeta = 0$, $f(0) = 0$, $\varphi(0) = 1$. Тогда достаточно показать, что при $s \to +\infty$ выполняется

$$I(s) = \sqrt{\frac{\pi}{c_0 s}} + o(s^{-1/2}).$$

Пусть $s \to +\infty$. Положим $\delta = \delta(s) = s^{-1/3}$. Тогда

$$I_1(s) = \left| \left(\int\limits_a^{-\delta} + \int\limits_\delta^b \right) \varphi_1(x)\varphi_2(s,x)e^{sf(x)}dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b |\varphi_1(x)\varphi_2(s,x)| \exp\left((s-s_1) \sup_{\substack{x\in(a,b)\\ |x|>\delta}} \operatorname{Re} f(x) \right) dx.$$

Из условий 1, 2 следует, что

$$\sup_{\substack{x\in(a,b)\\ |x|>\delta}} \operatorname{Re} f(x) \leqslant -C_1\delta^2 = -C_1 s^{-2/3}.$$

Поэтому $I_1(s) = O(e^{-C_2 s^{1/3}}) = o(s^{-1/2})$. То есть

$$I(s) = \int_{-\delta}^{+\delta} \varphi_1(x)\varphi_2(x) e^{sf(x)} dx + o(s^{-1/2}).$$

Возьмем $\varepsilon_1 \in (0, \operatorname{Re} c_0)$. Пользуясь неравенством $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1$, при достаточно большом s и при $x \in (-\delta, \delta)$ имеем

$$|\varphi_1(x)\varphi_2(s,x)e^{sf(x)} - \varphi_1(x)\varphi_2(s,x)e^{-c_0 sx^2}| \leqslant C_3 e^{-\operatorname{Re} c_0\, sx^2}(e^{\varepsilon_1 sx^2} - 1).$$

Так как выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\operatorname{Re} c_0\, sx^2}(e^{\varepsilon_1 sx^2} - 1)dx = \sqrt{\frac{\pi}{(\operatorname{Re} c_0 - \varepsilon_1)s}} - \sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{Re} c_0 s}} = O(\varepsilon_1 s^{-1/2})$$

и ε_1 можно взять сколь угодно малым, то получаем

$$I(s) = \int\limits_{-\delta}^{+\delta} \varphi_1(x)\varphi_2(s,x) e^{-c_0 sx^2} dx + o(s^{-1/2}). \tag{1.71}$$

Возьмем $\varepsilon_2 > 0$. Пользуясь условиями 3, 4, при достаточно большом s и $x \in (-\delta, \delta)$ имеем

$$|\varphi_1(x)\varphi_2(s,x) - 1| \leqslant \varepsilon_2.$$

Так как ε_2 можно взять сколь угодно малым, то аналогично тому, как было получено (1.71), имеем

$$I(s) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-c_0 sx^2} dx + o(s^{-1/2}).$$

Осталось заменить промежуток интегрирования на $(-\infty, +\infty)$. Так как

$$\left| \left(\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{+\infty} \right) e^{-c_0 sx^2} dx \right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\operatorname{Re} c_0 x^2} dx \cdot e^{-\operatorname{Re} c_0 (s-1)\delta^2} = o(s^{-1/2}),$$

то

$$I(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-c_0 s x^2} dx + o(s^{-1/2}).$$

Теорема 3 доказана. □

Из теоремы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_1^+(\gamma)| = \operatorname{Re} f_{1,+}(z_{1,\gamma}) = \operatorname{Re} h(z_{1,\gamma}).$$

Последнее равенство выполняется ввиду (1.68) и (1.70).

Найдем асимптотику интеграла $I_1^-(t)$.

Введем обозначение $\zeta = zn$. На основании формулы (1.58) Стирлинга получаем

$$\Psi_1(\zeta) = \varphi_{1,-}(z) e^{n f_{1,-}(z)},$$

где (см. (1.68) и (1.69))

$$f_{1,-}(z) = f_{1,+}(z) + 4z\pi i \tag{1.72}$$

и

$$\varphi_{1,-}(z) = \varphi_{1,+}(z) e^{-4z\pi i} \left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right).$$

Совершим замену $\zeta = nz = n(d_3 + iy)$, тогда

$$I_1^-(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} \Psi_1(\zeta) d\zeta = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_{1,-}(z) e^{n f_{1,-}(z)} dy.$$

Пусть $q_{1,-}(y) = \operatorname{Re} f_{1,-}(z)$, тогда $q'_{1,-}(y) = -(g(y) + 2\pi)$. Отсюда заключаем, что $q'_{1,-}(y)$ — убывающая функция. Равенство $q'_{1,-}(y) = 0$ возможно, если $g(y) = -2\pi$, то есть $y = y_{3,\gamma}$. Значит, функции $q_{1,-}(y)$ принимает в точке $y_{3,\gamma}$ наибольшее значение при $y \in (-\infty; 0]$. Так как $z_{3,\gamma}$ — корень уравнения (1.67), то $e^{f'_{1,-}(z_{3,\gamma})} = 1$, Поскольку $0 = q'_{1,-}(y_{3,\gamma}) = -\operatorname{Im} f'_{1,-}(z_{3,\gamma})$, то получаем равенство $f'_{1,-}(z_{3,\gamma}) = 0$. При $z = -b_1/2 + iy$ верно

$$f_{1,-}(z) = f_{1,-}(z_{3,\gamma}) - \frac{f''_{1,-}(z_{3,\gamma})}{2}(y - y_{3,\gamma})^2 + O\left((y - y_{3,\gamma})^2\right).$$

При $z = -b_1/2 + iy$ выполняется неравенство $f''_{1,-}(z) = f''_{1,+}(z) > 0$.

Отсюда из теоремы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_1^-(\gamma)| = \operatorname{Re} f_{1,-}(z_{3,\gamma}) = \operatorname{Re} h(z_{3,\gamma}).$$

Последнее равенство выполняется ввиду (1.72) и $f'_{1,-}(z_{3,\gamma}) = 0$.

Так как $y_{1,\gamma} > |y_{3,\gamma}| > 0$, то получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_1(\gamma)| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_1^+(\gamma) + I_1^-(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{1,\gamma}).$$

Асимптотика $I_2(\gamma)$.

Используя свойства (1.61) гамма-функции, получаем

$$\Psi_2(\zeta) = \frac{\Gamma(\zeta + b_1 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_1 n)}{\Gamma(c_1 n + 2)}\frac{\Gamma(\zeta + b_2 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_2 n)}{\Gamma(c_2 n + 2)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\zeta + b_3 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_3 n)}{\Gamma(c_3 n + 2)}\left(\frac{\sin\pi\zeta}{\pi}\right)\frac{e^{-\zeta\ln\gamma}}{(-1)^{a_1 n + a_2 n + a_3 n + 1}}.$$

Определим $I_2^+(\psi)$, $I_2^-(\psi)$ с помощью равенства

$$I_2(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^+}\Psi_2(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^-}\Psi_2(\zeta)\,d\zeta = I_2^+(\gamma) + I_2^-(\gamma).$$

Найдем асимптотику интеграла $I_2^+(\gamma)$.

Введем обозначение $\zeta = zn$. На основании формулы (1.58) Стирлинга получаем

$$\Psi_2(\zeta) = \varphi_{2,+}(z)e^{nf_{2,+}(z)},$$

где (см. (1.68) и (1.69))

$$f_{2,+}(z) = f_{1,+}(z) + 2z\pi i \tag{1.73}$$

и

$$\varphi_{2,+}(z) = \varphi_{1,+}(z)\left(\frac{e^{2iz\pi n} - 1}{2i\pi}\right)^{-1}\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right).$$

Совершим замену $\zeta = nz = n(d_3 + iy)$, тогда

$$I_2^+(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+}\Psi_{2,+}(\zeta)d\zeta = \frac{n}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\varphi_{2,+}(z)e^{nf_{2,+}(z)}dy.$$

Пусть $q_{2,+}(y) = \operatorname{Re} f_{2,+}(z)$, тогда $q'_{2,+}(y) = -(g(y))$. Отсюда заключаем, что $q'_{2,+}(y)$ — убывающая функция. Равенство $q'_{2,+}(y) = 0$ возможно, если

$g(y) = 0$, то есть $y = y_{2,\gamma}$. Значит, функция $q_{2,+}$ принимает наибольшее значение в точке $y_{2,\gamma}$ при $y \in [0; +\infty)$. Так как $z_{2,\gamma}$ — корень уравнения уравнения (1.67), то $e^{f'_{2,+}(z_{2,\gamma})} = 1$. Поскольку $0 = q'_{2,+}(y_{2,\gamma}) = -\operatorname{Im} f'_{2,+}(z_{2,\gamma})$, то получаем равенство $f'_{2,+}(z_{2,\gamma}) = 0$. При $z = -b_1/2 + iy$ верно

$$f_{2,+}(z) = f_{2,+}(z_{2,\gamma}) - \frac{f''_{2,+}(z_{2,\gamma})}{2}(y - y_{2,\gamma})^2 + O\left((y - y_{2,\gamma})^2\right).$$

При $z = -b_1/2 + iy$ выполняется $f''_{2,+}(z) = f''_{1,+}(z) > 0$.

Отсюда из теоремы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_2^+(\gamma)| = \operatorname{Re} f_{2,+}(z_{2,\gamma}) = \operatorname{Re} h(z_{2,\gamma}).$$

Последнее равенство выполняется ввиду (1.73) и $f'_{2,+}(z_{2,\gamma}) = 0$.

Найдем асимптотику интеграла $I_2^-(\gamma)$.

Введем обозначение $\zeta = zn$. На основании формулы (1.58) Стирлинга получаем

$$\Psi_2(\zeta) = \varphi_{2,-}(z) e^{n f_{2,-}(z)},$$

где (см. (1.68) и (1.69))

$$f_{2,-}(z) = f_{1,+}(z) + 4z\pi i \tag{1.74}$$

и

$$\varphi_{2,-}(z) = \varphi_{1,+}(z) e^{-2iz\pi n} \left(\frac{e^{2iz\pi n} - 1}{2i\pi}\right)^{-1} \left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right).$$

Совершим замену $\zeta = nz = n(d_3 + iy)$, тогда

$$I_2^-(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} \Psi_2(\zeta) d\zeta = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_{2,-}(z) e^{n f_{2,-}(z)} dy.$$

Пусть $q_{2,-}(y) = \operatorname{Re} f_{2,-}(z)$, тогда $q'_{2,-}(y) = -(g(y) + 2\pi)$. Отсюда заключаем, что $q'_{2,-}(y)$ — убывающая функция. Равенство $q'_{2,-}(y) = 0$ возможно, если $g(y) = -2\pi$, то есть $y = y_{3,\gamma}$. Значит, функция $q_{2,-}(y)$ принимает наибольшее значение в точке $y_{3,\gamma}$ при $y \in (-\infty; 0]$. Так как $z_{3,\gamma}$ — корень уравнения (1.67), то $e^{f'_{3,-}(z_{2,\gamma})} = 1$. Поскольку $0 = q'_{2,-}(y_{3,\gamma}) = -\operatorname{Im} f'_{2,-}(z_{3,\gamma})$, то получаем равенство $f'_{2,-}(z_{3,\gamma}) = 0$. При $z = -b_1/2 + iy$ верно

$$f_{2,-}(z) = f_{2,-}(z_{3,\gamma}) - \frac{f''_{2,-}(z_{3,\gamma})}{2}(y - y_{3,\gamma})^2 + O\left((y - y_{3,\gamma})^2\right).$$

При $z=-b_1/2+iy$ выполняется $f''_{2,-}(z)=f''_{1,+}(z)>0$.

Отсюда из теоремы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_2^-(\gamma)|=\operatorname{Re}f_{2,-}(z_{3,\gamma})=\operatorname{Re}h(z_{3,\gamma}).$$

Последнее равенство выполняется ввиду (1.74) и того, что $f'_{2,-}(z_{3,\gamma})=0$.

Так как $|y_{3,\gamma}|>y_{2,\gamma}>0$, то получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_2(\gamma)|=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_2^+(\gamma)+I_2^-(\gamma)|=\operatorname{Re}h(z_{3,\gamma}).$$

Асимптотика $I_3(\gamma)$.

Используя свойства (1.61) гамма-функции, получаем

$$\Psi_3(\zeta)=\frac{\Gamma(\zeta+b_1n+2)\Gamma(-\zeta-a_1n)}{\Gamma(c_1n+2)}\frac{\Gamma(\zeta+b_2n+2)\Gamma(-\zeta-a_2n)}{\Gamma(c_2n+2)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\zeta+b_3n+2)\Gamma(-\zeta-a_3n)}{\Gamma(c_3n+2)}\frac{e^{-\zeta\ln\gamma-\pi i\zeta}}{(-1)^{a_1n+a_2n+a_3n+1}}.$$

Введем обозначение $\zeta=zn$. На основании формулы (1.58) Стирлинга получаем

$$\Psi_3(\zeta)=\varphi_3(z)e^{nf_3(z)},$$

где (см. (1.68) и (1.69))

$$f_3(z)=f_{1,+}(z)+2z\pi i \tag{1.75}$$

и

$$\varphi_3(z)=\varphi_{1,+}(z)\left(\frac{e^{2iz\pi n}-1}{2i\pi}\right)^{-2}\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right).$$

Совершим замену $\zeta=nz=n(d_3+iy)$, тогда

$$I_3(\gamma)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\Psi_3(\zeta)d\zeta=\frac{n}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_3(z)e^{nf_3(z)}dy.$$

Пусть $q_3(y)=\operatorname{Re}f_3(z)$, тогда $q'_3(y)=-(g(y))$. Отсюда заключаем, что $q_3(y)$ — убывающая функция. Равенство $q'_3(y)=0$ возможно, если только $g(y)=0$, то есть $y=y_{2,\gamma}$. Значит, функция $q_3(y)$ принимает наибольшее значение в $y_{2,\gamma}$ при $y\in\mathbb{R}$. Так как $z_{2,\gamma}$ — корень уравнения (1.67), то $e^{f'_3(z_{2,\gamma})}=1$. Поскольку $0=q'_3(y_{2,\gamma})=-\operatorname{Im}f'_3(z_{2,\gamma})$, то получаем равенство $f'_3(z_{2,\gamma})=0$. При $z=-b_1/2+iy$ верно

$$f_3(z)=f_3(z_{2,\gamma})-\frac{f''_3(z_{2,\gamma})}{2}(y-y_{2,\gamma})^2+O\left((y-y_{2,\gamma})^2\right).$$

При $z = -b_1/2 + iy$ выполняется $f_3''(z) = f_{1,+}''(z) > 0$.

Отсюда из теоремы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_3(\gamma)| = \operatorname{Re} f_3(z_{2,\gamma}) = \operatorname{Re} h(z_{2,\gamma}).$$

Последнее равенство выполняется ввиду (1.75) и $f_3'(z_{2,\gamma}) = 0$.

Предложение 4 доказано. □

1.10 Оценки показателей иррациональности β_k

Получены оценки сверху показателей иррациональности чисел

$$\beta_k = \sqrt{2k-1} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2k-1}}{k-1}, \text{ где } k = 2l \text{ при } l \in \mathbb{Z}, l > 0.$$

Теорема 4. *Справедливы оценки.*

k	$\mu(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu(\beta_k) \leqslant$
2	$4,60105\ldots$	8	$3,66666\ldots$	14	$3,53683\ldots$	20	$3,47757\ldots$
4	$3,94704\ldots$	10	$3,60809\ldots$	16	$3,51298\ldots$		
6	$3,76069\ldots$	12	$3,56730\ldots$	18	$3,49365\ldots$		

Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы будет основано на лемме 10. Рассмотрим последовательность (см. определение $\lambda_{k,2}$ в (1.48))

$$l_n = R_{k,n,2} D_2 (i\sqrt{2k-1} J_2(\lambda_{k,2})\Lambda) = \\ = R_{k,n,2} D_2 U_1(\lambda_{k,2})\Lambda \cdot \beta_k - R_{k,n,2} D_2 U_2(\lambda_{k,1})\Lambda i\sqrt{2k-1} = q_n \beta_k + p_n.$$

Из леммы 9 следует, что q_n, $p_n \in \mathbb{Z}$.

Из предложения 4 при $\gamma = \lambda_{k,2}$ получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |q_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |R_{k,n,2} D_2 U_1(\lambda_{k,2})\Lambda| = \\ = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |R_{k,n,2} D_2 J_1(\lambda_{k,2})\Lambda| = N_{k,2} + M_2 + M(\lambda_{k,2}).$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |l_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |R_{k,n,2} D_2 J_2(\lambda_{k,2})\Lambda| = N_{k,2} + M_2 + m(\lambda_{k,2}).$$

Здесь (см. (1.49), (1.42))

$$N_{k,2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(R_{k,n,2}) = \begin{cases} -\dfrac{c_2}{2} \ln m, & \text{если } k = 2m, \\ -\dfrac{c_2}{2} \ln k + \dfrac{c_1 + c_2 + c_3}{2} \ln 2, & \text{если } k = 2m-1, \end{cases}$$

$$M_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln D_2.$$

Если $N_{k,2} + M_2 + m(\lambda_{k,2}) < 0$, то то по лемме 10

$$\mu(\beta_k) \leqslant 1 - \frac{N_{k,2} + M_2 + M(\lambda_{k,2})}{N_{k,2} + M_2 + m(\lambda_{k,2})}. \tag{1.76}$$

Далее укажем значения параметров и приведем вычисления, из которых следуют оценки, предложенные в формулировке теоремы 4.

Чтобы оценить $\mu(\beta_k)$, где $k = 2, 4, \ldots, 20$, выберем параметры

$$a_2 = 2, a_3 = 4, b_1 = 14.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда (см. (1.31))

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{12}; \frac{3}{14}\right) \bigcup \left[\frac{1}{4}; \frac{5}{14}\right) \bigcup \left[\frac{3}{8}; \frac{3}{7}\right) \bigcup \left[\frac{7}{12}; \frac{5}{7}\right) \bigcup \left[\frac{3}{4}; \frac{6}{7}\right) \bigcup \left[\frac{7}{8}; \frac{13}{14}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Пользуясь (1.31), (1.32), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_2 = 14 - \left(\psi\left(\frac{3}{14}\right) - \psi\left(\frac{1}{12}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{13}{14}\right) - \psi\left(\frac{7}{8}\right)\right) = 4,00979\ldots.$$

Приведем таблицу, в которых указаны для $k = 2, 4, 6, \ldots, 20$ величины $m(\lambda_{k,2})$, $M(\lambda_{k,2})$, $N_{k,2}$, оценки сверху $\mu(\beta_k)$, получающиеся из (1.76).

k	$m(\lambda_{2,k})$	$M(\lambda_{2,k})$	$N_{k,2}$	$\mu(\beta_k) \leqslant$
2	$-13,49026\ldots$	$30,12993\ldots$	0	$4,60105\ldots$
4	$-14,69174\ldots$	$41,14981\ldots$	$-\ln 2^5$	$3,94704\ldots$
6	$-15,15800\ldots$	$47,42473\ldots$	$-\ln 3^5$	$3,76069\ldots$
8	$-15,42046\ldots$	$51,83401\ldots$	$-\ln 4^5$	$3,66666\ldots$
10	$-15,59357\ldots$	$55,23685\ldots$	$-\ln 5^5$	$3,60809\ldots$
12	$-15,71842\ldots$	$58,00849\ldots$	$-\ln 6^5$	$3,56730\ldots$
14	$-15,81380\ldots$	$60,34690\ldots$	$-\ln 7^5$	$3,53683\ldots$
16	$-15,88967\ldots$	$62,36941\ldots$	$-\ln 8^5$	$3,51298\ldots$
18	$-15,95185\ldots$	$64,15131\ldots$	$-\ln 9^5$	$3,49365\ldots$
20	$-16,00398\ldots$	$65,74381\ldots$	$-\ln 10^5$	$3,47757\ldots$

Теорема 4 доказана. $\square$

Замечание. Доказана формула (1.76) для оценок показателей иррациональности β_k, где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. При нечетных маленьких значениях k не удается оценить показатель иррациональности β_k, так как в этих случаях

$$N_{k,2} + M_2 + m(\lambda_{k,2}) > 0.$$

1.11 Оценки квадратичных показателей иррациональности β_k

Получены оценки сверху показателей иррациональности чисел

$$\beta_k = \sqrt{2k-1}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2k-1}}{k-1}, \text{ где } k = 2l \text{ при } l \in \mathbb{Z}, l > 4.$$

Теорема 5. *Справедливы оценки.*

k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$
10	$12,28656\ldots$	14	$10,34013\ldots$	18	$9,35032\ldots$
12	$11,11119\ldots$	16	$9,77530\ldots$	20	$9,01564\ldots$

Доказательство теоремы 5. Доказательство теоремы 5 основано на лемме 12. Рассмотрим последовательности (см. определение $\lambda_{k,2}$ в (1.48))

$$l_n = R_{k,n,3}D_3J_2(\lambda_{k,2})\Lambda i\sqrt{2k-1} = \\ = R_{k,n,3}D_3U_1(\lambda_{k,2})\Lambda\cdot\beta_k - R_{k,n,3}D_3U_2(\lambda_{k,2})\Lambda i\sqrt{2k-1} = q_n\beta_k + p_n.$$

$$m_n = -R_{k,n,3}D_3\left(J_3(\lambda_{k,2}) + (i\pi + \ln\lambda_{k,2})J_2(\lambda_{k,2})\right)\Lambda 2(2k-1) = \\ = R_{k,n,3}D_3U_1(\lambda_{k,2})\Lambda\cdot\beta_k^2 + R_{k,n,3}D_3U_3(\lambda_{k,2})\Lambda(2k-1) = q_n\beta_k^2 + r_n.$$

Из леммы 9 следует, что q_n, p_n, $r_n \in \mathbb{Z}$.
Из предложения 4 при $\gamma = \lambda_{k,2}$ получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|q_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|R_{k,n,3}D_3U_1(\lambda_{k,2})\Lambda| = \\ = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|R_{k,n,3}D_3J_1(\lambda_{k,2})\Lambda| = N_{k,3} + M_3 + M(\lambda_{k,2}),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|l_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left|R_{k,n,3}D_3J_2(\lambda_{k,2})\Lambda i\sqrt{2k-1}\right| = N_{k,3} + M_3 + m(\lambda_{k,2}),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|m_n| =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left|R_{k,n,3}D_3\left(J_3(\lambda_{k,2})+(i\pi+\ln\lambda_{k,2})J_2(\lambda_{k,2})\right)\Lambda 2(2k-1)\right| =$$
$$= N_{k,3}+M_3+m(\lambda_{k,2}).$$

Здесь (см. (1.50), (1.42))

$$N_{k,3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(R_{k,n,3})=\begin{cases}-\dfrac{c_3}{2}\ln m, & \text{если } k=2m,\\ -\dfrac{c_3}{2}\ln k+\dfrac{c_1+c_2+c_3}{2}\ln 2, & \text{если } k=2m-1,\end{cases}$$

$$M_3=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln D_3.$$

Если $N_{k,3}+M_3+m(\lambda_{k,2})<0$, то из леммы 12

$$\mu_2\left(\beta_k\right)\leqslant 1-\frac{N_{k,3}+M_3+M(\lambda_{k,2})}{N_{k,3}+M_3+m(\lambda_{k,2})}. \tag{1.77}$$

Далее укажем значения параметров и приведем вычисления, из которых следуют оценки, предложенные в формулировке теоремы 5.

Чтобы оценить $\mu_2(\beta_k)$, где $k=10,\ 12$, выберем параметры

$$a_2=2, a_3=4, b_1=26.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i=1,2,3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда

$$\Omega_1=\left[\frac{1}{24};\frac{1}{18}\right)\bigcup\left[\frac{1}{12};\frac{1}{9}\right)\bigcup\cdots\bigcup\left[\frac{19}{20};\frac{25}{26}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C\Delta_1'=d_{24n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3=26+24-\left(\psi\left(\frac{1}{18}\right)-\psi\left(\frac{1}{24}\right)+\cdots+\psi\left(\frac{25}{26}\right)-\psi\left(\frac{19}{20}\right)\right)=$$
$$=35,01150\ldots.$$

Приведем таблицу, в которых указаны для $k=10,\ 12$ величины $m(\lambda_{k,2})$, $M(\lambda_{k,2})$, $N_{k,3}$, оценки сверху $\mu_2(\beta_k)$, получающиеся из (1.77).

k	$m(\lambda_{k,2})$	$M(\lambda_{k,2})$	$N_{k,3}$	$\mu_2\left(\beta_k\right) \leqslant$
10	$-33,36669\ldots$	$124,39442\ldots$	$-\ln 5^9$	$12,28656\ldots$
12	$-33,65942\ldots$	$130,49470\ldots$	$-\ln 6^9$	$11,11119\ldots$

Чтобы оценить $\mu_2(\beta_k)$, где $k = 14$, 16, выберем параметры

$$a_2 = 2, a_3 = 4, b_1 = 30.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{28}; \frac{1}{22}\right) \bigcup \left[\frac{1}{14}; \frac{1}{11}\right) \bigcup \cdots \bigcup \left[\frac{23}{24}; \frac{29}{30}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C \Delta'_1 = d_{28n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 30 + 28 - \left(\psi\left(\frac{1}{22}\right) - \psi\left(\frac{1}{28}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{29}{30}\right) - \psi\left(\frac{23}{24}\right)\right) = \\ = 41,98064\ldots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 14$, 16 величины $m(\lambda_{k,2})$, $M(\lambda_{k,2})$, $N_{k,3}$, оценки сверху $\mu_2(\beta_k)$, получающиеся из (1.77).

k	$m(\lambda_{k,2})$	$M(\lambda_{k,2})$	$N_{k,3}$	$\mu_2\left(\beta_k\right) \leqslant$
14	$-39,96768\ldots$	$160,54861\ldots$	$-\ln 7^{11}$	$10,34013\ldots$
16	$-40,17907\ldots$	$165,80893\ldots$	$-\ln 8^{11}$	$9,77530\ldots$

Чтобы оценить $\mu_2(\beta_k)$, где $k = 18$ выберем параметры

$$a_2 = 8, a_3 = 16, b_1 = 122.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{114}; \frac{1}{90}\right) \bigcup \left[\frac{1}{57}; \frac{1}{45}\right) \bigcup \cdots \bigcup \left[\frac{97}{98}; \frac{121}{122}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C\Delta_1' = d_{114n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 122 + 114 - \left(\psi\left(\frac{1}{90}\right) - \psi\left(\frac{1}{114}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{121}{122}\right) - \psi\left(\frac{97}{98}\right)\right) = \\ = 171,44213\ldots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 18$ величины $m(\lambda_{k,2})$, $M(\lambda_{k,2})$, $N_{k,3}$, оценка сверху $\mu_2(\beta_k)$, получающаяся из (1.77).

k	$m(\lambda_{k,2})$	$M(\lambda_{k,2})$	$N_{k,3}$	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$
18	$-164,48505\ldots$	$694,97826\ldots$	$-\ln 9^{45}$	$9,35032\ldots$

Чтобы оценить $\mu_2(\beta_k)$, где $k = 20$ выберем параметры

$$a_2 = 8, a_3 = 16, b_1 = 126.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{118}; \frac{1}{94}\right) \bigcup \left[\frac{1}{59}; \frac{1}{47}\right) \bigcup \cdots \bigcup \left[\frac{101}{102}; \frac{125}{126}\right).$$

Множество Ω_1 найдено с помощью компьютера. Отметим, что (см. (1.31), (1.32), (1.41), (1.42))

$$d_C\Delta_1' = d_{118n}.$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.41), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 126 + 118 - \left(\psi\left(\frac{1}{94}\right) - \psi\left(\frac{1}{118}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{125}{126}\right) - \psi\left(\frac{101}{102}\right)\right) = \\ = 178,52161\ldots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 20$ величины $m(\lambda_{k,2})$, $M(\lambda_{k,2})$, $N_{k,3}$, оценка сверху $\mu_2(\beta_k)$, получающаяся из (1.77).

k	$m(\lambda_{k,2})$	$M(\lambda_{k,2})$	$N_{k,3}$	$\mu_2\left(\beta_k\right) \leqslant$
20	$-171,25344\ldots$	$738,90586\ldots$	$-\ln 10^{47}$	$9,01564\ldots$

Теорема 5 доказана. □

Замечание. Доказана формула (1.77) для оценок квадратичных показателей иррациональности β_k, где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Более точные оценки $\mu_2(\beta_k)$, где $k < 10$, чем те, что получаются из (1.77), приведены в теореме 8. При нечетных маленьких значениях k не удается оценить квадратичные показатели иррациональности β_k, так как в этих случаях

$$K_3 + M_3 + m(\lambda_{k,2}) > 0.$$

2 Совместное приближение $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$

Получена оценка показателя совместного приближения $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$.

Во второй главе используются обозначения, введенные в первой главе.

2.1 Выбор параметров

Мы будем рассматривать функции $J_1(t)$, $J_2(t)$, $I_1(t)$, $I_2(t)$, которые были введены в главе 1 (см. (1.4)). Эти функции зависели от некоторого многочлена $A(x)$. Выберем значения параметров

$$a_2 = 2, a_3 = 4, b_1 = 14. \tag{2.1}$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются через a_2, a_3, b_1 (см. (1.2)). Тогда многочлен $A(x)$ имеет вид (см. (1.1))

$$A(x) = \frac{(x+1)\dots(x+14n+1)}{(14n+1)!}\times \\ \times \frac{(x+2n+1)\dots(x+12n+1)}{(10n+1)!}\frac{(x+4n+1)\dots(x+10n+1)}{(6n+1)!}.$$

2.2 Арифметические свойства $U_1(\lambda)$, $U_2(\lambda)$

Будем в качестве параметра t в $U_1(t)$, $U_2(t)$ подставлять число

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}. \tag{2.2}$$

Множество Ω_1 определяется с помощью (1.31), множество Ξ_1 — с помощью (1.32), число Λ — с помощью (1.33), числа Δ_1, D_1, D_2 — с помощью (1.42).

Введем обозначения

$$R_{n,1} = (i\sqrt{3})^{-7n-1}, \quad R_{n,2} = (i\sqrt{3})^{-5n-1}. \tag{2.3}$$

Лемма 13. *Справедливы утверждения*

$$2Y_1 = 2R_{n,1}D_1U_1(\lambda)\Lambda \in \mathbb{Z}\left[i\sqrt{3}\right], 2Y_2 = 2R_{n,2}D_2U_2(\lambda)\Lambda \in \mathbb{Z}\left[i\sqrt{3}\right].$$

Доказательство леммы 13. Можно проверить, что

$$\lambda+\frac{1}{\lambda}, \lambda-\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{Q}(i\sqrt{3}).$$

Отсюда из следствия 2 получаем

$$U(\lambda), V(\lambda) \in \mathbb{Q}(i\sqrt{3}). \tag{2.4}$$

Обозначим через

$$\frac{\lambda}{\lambda-1}=e^{\frac{2\pi i}{3}}=p_1 \text{ и } \frac{1}{1-\lambda}=1-e^{\frac{2\pi i}{3}}=p_2$$

корни уравнения $x^2-x+i\sqrt{3}=0$.

Для доказательства леммы 13 достаточно показать, что Y_1^2, $Y_2^2 \in \mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ — кольцо целых алгебраических чисел. Действительно, если это так, то Y_1, Y_2 — целые алгебраические числа, а из (2.4) получаем, что Y_1, $Y_2 \in \mathbb{Q}\left(i\sqrt{3}\right)$. Следовательно, $2Y_1$, $2Y_2 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.

Лемма 8 утверждает, что (здесь мы используем определения (1.9) многочленов $A_l(x)$ и соотношения для $e_j^{(l)}$ из предложения 1)

$$D_l A_l^{(l-1)}(k)\Lambda \in \mathbb{Z}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \text{ то есть } D_l e_j^{(l)}\Lambda \in \mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

Из предложения 1 и леммы 3 мы получаем

$$-\left(U_2(\lambda)\right)^2=U_2(\lambda)U_2\left(\frac{1}{\lambda}\right)=(p_1p_2)^{10n+2}\sum_{j=10n+1}^{30n+2} e_j^{(2)}p_1^{j-10n-1}\sum_{j=10n+1}^{30n+2} e_j^{(2)}p_2^{j-10n-1}=$$

$$=\left(i\sqrt{3}\right)^{10n+2}\sum_{j=10n+1}^{30n+2} e_j^{(2)}p_1^{j-10n-1}\sum_{j=10n+1}^{30n+2} e_j^{(2)}p_2^{j-10n-1}. \tag{2.6}$$

Аналогичным образом выводится

$$\left(U_1(\lambda)\right)^2=\left(i\sqrt{3}\right)^{14n+2}\sum_{j=14n+1}^{30n+3} e_j^{(1)}p_1^{j-14n-1}\sum_{j=10n+1}^{30n+3} e_j^{(1)}p_2^{j-14n-1}. \tag{2.7}$$

При любом $L \in \mathbb{Z}$, $L \geqslant 0$, выполняется $p_i^L \in \mathbb{K}$, где $i=1,2$, так как $p_i \in \mathbb{K}$. Тогда из (2.5), (2.6), (2.7) получаем

$$Y_1^2=\left(\sum_{j=14n+1}^{30n+3}\left(D_1e_j^{(1)}\Lambda\right)p_1^{j-14n-1}\right)\left(\sum_{j=14n+1}^{30n+3}\left(D_1e_j^{(1)}\Lambda\right)p_2^{j-14n-1}\right)\in \mathbb{K},$$

$$Y_2^2 = -\left(\sum_{j=10n+1}^{30n+2} \left(D_2 e_j^{(2)} \Lambda\right) p_1^{j-10n-1}\right) \left(\sum_{j=10n+1}^{30n+2} \left(D_2 e_j^{(2)} \Lambda\right) p_2^{j-10n-1}\right) \in \mathbb{K}.$$

Лемма 13 доказана. □

2.3 Асимптотика $J_1(\lambda)$

Рассмотрим функцию

$$h(z) = \ln \frac{(z+14)^{14}(z+12)^{12}(z+10)^{10}}{(-z-2)^2(-z-4)^4 6^6 10^{10} 14^{14}}$$

и уравнение

$$\frac{(z+14)(z+12)(z+10)}{(-z)(-z-2)(-z-4)} = -\lambda. \tag{2.8}$$

У уравнения (2.8) есть три корня, а именно

$$z_1 = -35,81613\dots + i27,08352\dots = x_1 + iy_1,$$
$$z_2 = -7,66139\dots - i3,19287\dots = x_2 + iy_2,$$
$$z_3 = -7,52246\dots + i2,09011\dots = x_3 + iy_3.$$

В предложении 5 определяется величина $M(\lambda)$.

Предложение 5. *Справедливо равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |J_1(\lambda)| = \operatorname{Re} h(z_1) + 7\ln\sqrt{3} = M(\lambda) = 39,58524\dots.$$

Доказательство предложения 5. Так как $J_1(\lambda)$ отличается от $I_1(\lambda)$ множителем λ^{-7n-1} (см. (1.4)), то достаточно доказать

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_1(\lambda)| = \operatorname{Re} h(z_1).$$

Доказательство предложения 5 состоит из двух частей. В первой части мы представим интеграл $I_1(\lambda)$ в виде суммы интеграла $I_1'(\lambda)$ и некоторой суммы $I_1''(\lambda)$. Контур интегрирования L_1' для $I_1'(\lambda)$ будет представлять собой ломаную, состоящую из отрезков и лучей, при этом один из участков будет проходить через точку nz_1 (z_1 — корень уравнения (2.8)), а подынтегральная функция $I_1'(\lambda)$ в этом случае будет совпадать с подынтегральной функцией $I_1(\lambda)$. Во второй части мы посчитаем асимптотику интеграла $I_1'(\lambda)$ и оценим асимптотику суммы $I_1''(\lambda)$.

1 часть доказательства предложения 5.

Рассмотрим интеграл

$$I_1'(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1'} \Psi_1(\zeta) d\zeta,$$

где контур L_1' проходит через точку nz_1 и состоит из следующих частей (интегрирование происходит "снизу вверх", но порядок, в котором перечислены участки обратный):

1) Вертикальный луч $\Gamma_1 = [-50n + iy_1 n; -50n + i\infty)$.

2) Горизонтальный отрезок $\Gamma_2 = [-35n + iy_1 n; -50n + iy_1 n]$, этот отрезок содержит точку $z_1 n$.

3) Вертикальный отрезок $\Gamma_3 = [-35n + i22n; -35n + iy_1 n]$.

4) Горизонтальный отрезок $\Gamma_4 = [-19n - 0,5 + i22n; -35n + i22n]$.

5) Вертикальный отрезок $\Gamma_5 = [-19n - 0,5; -19n - 0,5 + i22n]$.

6) Вертикальный луч $\Gamma_6 = (-19n - 0,5 - i\infty; -19n - 0,5]$.

Определим интегралы

$$I_1^k(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \Psi_1(\zeta) d\zeta, \text{ где } k \in \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Тогда

$$I_1'(\lambda) = I_1^1(\lambda) + I_1^2(\lambda) + I_1^3(\lambda) + I_1^4(\lambda) + I_1^5(\lambda) + I_1^6(\lambda).$$

Докажем два факта.

a) Интеграл $I_1'(\lambda)$ сходится.

b) Справедливо равенство

$$I_1'(\lambda) = \sum_{k=19n+1}^{+\infty} A(-k)\lambda^k.$$

Через C_i будем обозначать некоторые положительные константы; если в скобках указана переменная n, то константа зависит от n. Считаем, что $\zeta = \sigma + i\tau$.

a) Достаточно показать, что сходятся $I_1^1(\lambda)$ и $I_1^6(\lambda)$. Если $\zeta \in \Gamma_1$ или $\zeta \in \Gamma_6 \cap \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta < -1/\pi\}$, то справедливы оценки

$$|A(\zeta)| < (|\zeta| + 14n + 1)^{30n+3} < C_1(n)|\zeta|^{30n+3}, \text{ поскольку } |\zeta| \geqslant C_2 n, \quad (2.9)$$

$$\left|\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)\right| < C_3 e^{-|\tau|\pi} \text{ при } |\tau| > \frac{1}{\pi}, \tag{2.10}$$

$$\text{так как } \left|\frac{1}{\sin\zeta}\right| < 4e^{-|\tau|} \text{ при } |\tau| > 1,$$

$$|(-\lambda)^{-\zeta}| = e^{-\sigma\ln|\lambda|+\tau\arg\lambda+\tau\pi} = C_4(n)e^{-\tau\pi/6+\tau\pi} = C_4(n)e^{5\tau\pi/6}. \tag{2.11}$$

Отсюда при $\zeta \in \Gamma_1$ или $\zeta \in \Gamma_6 \cap \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta < -1/\pi\}$ мы находим, что

$$|\Psi_1(\zeta)| < C_5(n)|\zeta|^{30n+3}e^{r_1(\tau)}. \tag{2.12}$$

Здесь

$$r_1(\tau) = -|\tau|\pi + \frac{5\tau\pi}{6} = \begin{cases} -\dfrac{\tau\pi}{6}, & \text{если } \tau \geqslant 0, \\ \dfrac{11\tau\pi}{6}, & \text{если } \tau < 0. \end{cases}$$

Так как в правой части (2.12) стоит интегрируемая функция на нужных промежутках, то получаем требуемое.

Факт *a)* доказан.

b) Вычислим $I_1'(\lambda)$.

Рассмотрим шесть точки A, B, C, C_1, D_1, D

$$A(-M_1; M_1), B(-M_1; -M_1), C(-19n - 0,5; -M_1),$$

$$C_1(-19n - 0,5; 22n), D_1(-50n; y_1 n) D = (-50n, M_1),$$

здесь $M > 50n$ — натуральное число, а $M_1 = M + 1/2$.

Очевидно, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{D_1DABCC_1\cup\\ \cup\Gamma_4\cup\Gamma_3\cup\Gamma_2}} \Psi_1(\zeta)d\zeta = \sum_{k=19n+1}^{M} Res_{\zeta=-k}\Psi_1(\zeta). \tag{2.13}$$

Докажем, что

$$\lim_{M\to+\infty}\int_{DA}\Psi_1(\zeta)d\zeta = \lim_{M\to+\infty}\int_{AB}\Psi_1(\zeta)d\zeta = \lim_{M\to+\infty}\int_{BC}\Psi_1(\zeta)d\zeta = 0. \tag{2.14}$$

На отрезке AB имеем $\sigma = -M_1$. Пользуясь оценками, которые аналогичны (2.9)–(2.11), получаем, что при $|\tau| > \frac{1}{\pi}$ и при достаточно большом M

$$|\Psi_1(\zeta)| \leqslant C_6(n)(2M_1)^{30n+3}|\lambda|^{M_1}e^{r_1(\tau)}. \tag{2.15}$$

При $\tau \leqslant \frac{1}{\pi}$ справедливо

$$|\Psi_1(\zeta)| \leqslant C_7(n)(2M_1)^{30n+3}|\lambda|^{M_1}. \tag{2.16}$$

На отрезках DA и BC имеем $|\tau| = M_1$. При достаточно большом M находим

$$|\Psi_1(\zeta)| \leqslant C_8(n)(2M_1)^{30n+3}e^{r_l(\pm M_1)}e^{-\sigma \ln|\lambda|}. \tag{2.17}$$

Интегрируя (2.15)–(2.17) по соответствующим промежуткам, получаем (2.14). То есть из (2.13) имеем

$$I_1'(\lambda) = \sum_{k=19n+1}^{+\infty} Res_{\zeta=-k}\left(\Psi_1(\zeta)\right).$$

Теперь мы найдем вычеты функции $\Psi_1(\zeta)$ в точках $\zeta = -k$.
В окрестностях этих точек выполняются равенства

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right) = (-1)^k \left(\frac{1}{(\zeta + k)} + O(1)\right),$$
$$A(\zeta) = A(-k) + O((\zeta + k)),$$
$$(-\lambda)^{-\zeta} = e^{-\zeta(\ln\lambda+\pi i)} = e^{k(\ln\lambda+\pi i)}e^{-(\zeta+k)(\ln\lambda+\pi i)} = (-1)^k\lambda^k\left(1 + O((\zeta + k))\right).$$

Поэтому

$$Res_{\zeta=-k}\left(\Psi_1(\lambda)\right) = A(-k)\lambda^k.$$

Откуда заключаем

$$I_1'(\lambda) = \sum_{k=19n+1}^{+\infty} A(-k)\lambda^k.$$

Факт *b)* доказан.

Таким образом, в силу (1.26) при $t = \lambda$ получаем

$$I_1(\lambda) = \sum_{k=14n+2}^{+\infty} A(-k)\lambda^k = I_1'(\lambda) + I_1''(\lambda), \text{ где } I_1''(\lambda) = \sum_{k=14n+2}^{19n} A(-k)\lambda^k.$$

2 часть доказательства предложения 5.

1. Асимптотика интеграла $I_1'(\lambda)$.

Приведем некоторые вычисления, которые будут нужны при подсчете асимптотики.

Используя свойства (1.61) гамма-функции, получаем

$$\Psi_1(\zeta) = -e^{-\zeta(\ln\lambda + i\pi)} \frac{\Gamma(-\zeta)}{\Gamma(14n+2)\Gamma(-\zeta-14n-1)} \frac{\Gamma(-\zeta-2n)}{\Gamma(10n+2)\Gamma(-\zeta-12n-1)} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(-\zeta-4n)}{\Gamma(6n+2)\Gamma(-\zeta-10n-1)} \frac{\pi}{\sin(\pi\zeta)}.$$

Введем обозначение $\zeta = zn$. Отметим, что в последующих выражениях константа в $O\left(n^{-1}\right)$ не зависят от z. На основании формулы (1.58) Стирлинга и равенств

$$\mathrm{Re}^{-1}(-\zeta) = O\left(n^{-1}\right) > 0, \mathrm{Re}^{-1}(-\zeta-14n-1) = O\left(n^{-1}\right) > 0,$$
$$\mathrm{Re}^{-1}(-\zeta-2n) = O\left(n^{-1}\right) > 0, \mathrm{Re}^{-1}(-\zeta-12n-1) = O\left(n^{-1}\right) > 0,$$
$$\mathrm{Re}^{-1}(-\zeta-4n) = O\left(n^{-1}\right) > 0, \mathrm{Re}^{-1}(-\zeta-10n-1) = O\left(n^{-1}\right) > 0$$

при $\zeta \in L_1'$ получаем

$$\Psi_1(\zeta) = \varphi_+(z)e^{nf_+(z)} = \varphi_-(z)e^{nf_-(z)},$$

где

$$\begin{aligned} f_+(z) &= (z+14)\ln(-z-14) - z\ln(-z) + \\ &+(z+12)\ln(-z-12) - (z+2)\ln(-z-2) + \\ &+(z+10)\ln(-z-10) - (z+4)\ln(-z-4) - \ln 14^{14}10^{10}6^6 - z\ln\lambda, \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\varphi_+(z) = \frac{-2i\pi}{e^{2i\pi zn}-1}\sqrt{\frac{(-z-14)^3(-z-12)^3(-z-10)^3}{840^3(2\pi)^3n^3(-z)(-z-2)(-z-4)}}\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right),$$
$$f_-(z) = f_+(z) - 2\pi i z,\ \varphi_-(z) = e^{2i\pi nz}\varphi_+(z).$$

Найдем производную $f_+'(z)$ и вторую производную $f_+''(z)$

$$f_+'(z) = \ln(-z-14) + \ln(-z-12) + \ln(-z-10) - \ln(-z) - \ln(-z-2) - \ln(-z-4) - \ln\lambda,$$

$$f_+''(z) = \frac{1}{z+14} + \frac{1}{z+12} + \frac{1}{z+10} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+4}.$$

Найдем производную $f_-'(z)$ и вторую производную $f_-''(z)$

$$f_-'(z) = f_+(z) - 2\pi i \text{ и } f_-''(z) = f_+''(z).$$

Для каждого действительного x_0 определим функцию

$$q_{x_0}(y) = \begin{cases} \operatorname{Re} f_+(z) & , \text{ если } y \geqslant 0, \\ \operatorname{Re} f_-(z) & , \text{ если } y < 0, \end{cases}$$

где $z = x_0 + iy$. Для каждого действительного x_0 определим функцию

$$s_{x_0}(y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{-x_0-14}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{-x_0-12}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{-x_0-10}\right) - \\ - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{-x_0}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{-x_0-2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{-x_0-4}\right) - \frac{\pi}{6}.$$

В случае $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ найдем производную $q'_{x_0}(y)$

$$q'_{x_0}(y) = \operatorname{Re}\left[\frac{\partial f_+(z)}{\partial y}\right] = -\operatorname{Im}\left[\frac{\partial f_+(z)}{\partial z}\right] = s_{x_0}(y). \tag{2.19}$$

В случае $\operatorname{Im} z < 0$ найдем производную $q'_{x_0}(y)$

$$q'_{x_0}(y) = s_{x_0}(y) + 2\pi.$$

Найдем вторую производную $q''_{x_0}(y)$

$$q''_{x_0}(y) = -\left(\frac{(x_0+14)}{(x_0+14)^2+y^2}\right) - \left(\frac{(x_0+12)}{(x_0+12)^2+y^2}\right) - \left(\frac{(x_0+10)}{(x_0+10)^2+y^2}\right) + \\ + \left(\frac{x_0}{(x_0)^2+y^2}\right) + \left(\frac{(x_0+2)}{(x_0+2)^2+y^2}\right) + \left(\frac{(x_0+4)}{(x_0+4)^2+y^2}\right).$$

Для каждого действительного $y_0 \geqslant 0$ определим функцию

$$p_{y_0}(x) = \operatorname{Re} f_+(z),$$

где $z = x + iy_0$. Найдем производную $p'_{y_0}(x)$

$$p'_{y_0}(x) = \operatorname{Re}\left[\frac{\partial f_+(z)}{\partial x}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{\partial f_+(z)}{\partial z}\right] = \\ = \frac{1}{2}\ln\frac{((x+14)^2+(y_0)^2)((x+12)^2+(y_0)^2)((x+10)^2+(y_0)^2)}{(x^2+(y_0)^2)((x+2)^2+(y_0)^2)((x+4)^2+(y_0)^2)|\lambda|}.$$

Найдем вторую производную $p''_{y_0}(x)$

$$p''_{y_0}(x) = \left(\frac{(x+14)}{(x+14)^2+(y_0)^2}\right) + \left(\frac{(x+12)}{(x+12)^2+(y_0)^2}\right) + \left(\frac{(x+10)}{(x+10)^2+(y_0)^2}\right) - \\ - \left(\frac{x}{x^2+(y_0)^2}\right) - \left(\frac{(x+2)}{(x+2)^2+(y_0)^2}\right) - \left(\frac{(x+4)}{(x+4)^2+(y_0)^2}\right).$$

Посчитаем асимптотику $I'_1(\lambda)$. Главный член асимптотики $I'_1(\lambda)$ совпадает с главным членом асимптотики $I_1^2(\lambda)$.

Отметим, что часть вычислений при подсчете асимптотики совершены с помощью компьютера.

Неоднократно будем использовать неравенства

$$|\varphi_+(z)| \leqslant C_9|z|^3 n^{-3/2} \text{ при } \zeta \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5,$$
$$|\varphi_-(z)| \leqslant C_{10} n^{-3/2}|z|^3 \text{ при } \zeta \in \Gamma_6,$$

которые верны при достаточно большом n.

Рассмотрим несколько случаев. Основная идея состоит в том, чтобы оценить асимптотики интегралов $I_1^k(\lambda)$ с помощью наибольших значений $\operatorname{Re} f_+(z)$ или $\operatorname{Re} f_-(z)$ на соответствующих промежутках (именно поэтому были введены функции $q_{x_0}(y)$ и $p_{y_0}(x)$).

1.1. Оценка интеграла $I_1^1(\lambda)$.

Совершим замену $\zeta = zn = (-50 + iy)n$, тогда

$$I_1^1(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-50n+iy_1n}^{-50n+i\infty} \varphi_+(z) e^{nf_+(z)} d\zeta = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{y_1}^{+\infty} \varphi_+(z) e^{nf_+(z)} dy.$$

У уравнения $q''_{(-50)}(y) = 0$ всего один корень $y_{(-50)} = 42,61455\ldots$ при $y \geqslant y_1$ и $q''_{(-50)}(y) < 0$ при $y > y_{(-50)}$. Поэтому функция $q'_{(-50)}(y)$ в точке $y = y_{(-50)}$ принимает наибольшее значение при $y \in [y_1; +\infty)$. Пользуясь неравенством

$$q'_{(-50)}(y_{(-50)}) = -0,17371\cdots < -0,1,$$

получаем

$$q_{(-50)}(y) - q_{(-50)}(y_1) = q'_{(-50)}(\theta) \cdot (y - y_1) \leqslant$$
$$\leqslant q'_{(-50)}(y_{(-50)}) \cdot (y - y_1) \leqslant -0,1(y - y_1)$$

для некоторого числа $\theta = \theta(y)$, $y_1 \leqslant \theta \leqslant y$. Тогда при достаточно большом

n имеем

$$|I_1^1(\lambda)| \leqslant \left|\frac{n}{2\pi}\int\limits_{y_1}^{+\infty} \varphi_+(z)e^{n\operatorname{Re} f_+(z)}\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|e^{q_{(-50)}(y_1)n}\int\limits_{y_1}^{+\infty} y^3 e^{(q_{(-50)}(y)-q_{(-50)}(y_1))n}dy\right| \leqslant e^{q_{(-50)}(y_1)n}\left|\int\limits_{y_1}^{+\infty} y^3 e^{-0,1(y-y_1)n}dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_{11}e^{q_{(-50)}(y_1)n}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|I_1^1(\lambda)| \leqslant q_{(-50)}(y_1) = 35,45097\ldots.$$

1.2. Асимптотика интеграла $I_1^2(\lambda)$.

Совершим замену $\zeta = zn = (x+iy_1)n$, тогда

$$I_1^2(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-35n+iy_1n}^{-50n+iy_1n} \varphi_+(z)e^{nf_+(z)}\,d\zeta = \frac{n}{2\pi i}\int\limits_{-35}^{-50}\varphi_+(z)e^{nf_+(z)}\,dx.$$

Несложно проверить, что $p''_{y_1}(x) < 0$ при $x \in [-50;-35]$. Поэтому у уравнения $p'_{y_1}(x) = 0$ не более одного корня при $x \in [-50;-35]$. Так как z_1 — корень уравнения (2.8), то

$$e^{f'_+(z_1)} = \frac{(z_1+14)(z_1+12)(z_1+10)}{z_1(z_1+2)(z_1+4)\lambda} = 1. \qquad (2.20)$$

Следовательно, $p'_{y_1}(x_1) = 0$, то есть функция $p_{y_1}(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x = x_1$ при $x \in [-50;-35]$. Значит, $f'_+(z_1) = 2\pi ik = -iq'_{x_1}(y_1)$ (см. (2.19)). В силу (2.19) имеем

$$-\frac{\pi}{6} < q'_{x_1}(y_1) < 3\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} < 2\pi,$$

то есть $f'_+(z_1) = 0$. Значит, при $\zeta \in \Gamma_2$ выполняется

$$f_+(z) = f_+(z_1) + \frac{f''_+(z_1)}{2}(x-x_1)^2 + O\left((x-x_1)^3\right).$$

Так как $\operatorname{Re} f''_+(z_1) = -0,00078\cdots < 0$, то из теоремы 3 получаем

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_1^2(\lambda)| = \operatorname{Re}\ f_+(z_1) = \operatorname{Re}\ h(z_1) = 35,74009\ldots.$$

Второе равенство верно ввиду (2.18) и (2.20).

1.3. Оценка интеграла $I_1^3(\lambda)$.

Совершим замену $\zeta = zn = (-35 + iy)n$, тогда

$$I_1^3(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-35n+i22n}^{-35n+iy_1 n} \varphi_+(z) e^{nf_+(z)} d\zeta = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{22}^{y_1} \varphi_+(z) e^{nf_+(z)}\, dy.$$

Несложно проверить, что $q''_{(-35)}(y) > 0$ при $y \in [22; y_1]$. Значит, функция $q'_{(-35)}(y)$ принимает в точке $y = 22$ наименьшее значение при $\in [22; y_1]$. То есть

$$q'_{(-35)}(y) \geqslant q'_{(-35)}(22) = 0,00352\dots > 0$$

при $\in [22; y_1]$. Поэтому функция $q_{(-35)}(y)$ принимает наибольшее значение в точке $y = y_1$ при $y \in [22; y_1]$. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |I_1^3(\lambda)| \leqslant q_{(-35)}(y_1) = 35,73989\dots.$$

1.4. Оценка интеграла $I_1^4(\lambda)$.

Совершим замену $\zeta = zn = (x + i22)n$, тогда

$$I_1^4(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-19n-\frac{1}{2}+i22n}^{-35n+i22n} \varphi_+(z) e^{nf_+(z)}\, d\zeta = \frac{n}{2\pi i} \int\limits_{-19-\frac{1}{2n}}^{-35} \varphi_+(z) e^{nf_+(z)}\, dx.$$

Несложно проверить, что $x_{22} = -29,73765\dots$ — единственный корень уравнения $p''_{22}(x) = 0$ при $x \in [-35; -19]$. То есть $p'_{22}(x)$ принимает наибольшее значение при $x \in [-35; -19]$ в одной из точек $x = (-19)$, $x = x_{22}$, $x = (-35)$. Несложно проверить, что

$$p'_{22}(-19) = -0,20626\dots < 0, p'_{22}(x_{22}) = -0,32769\dots < 0,$$
$$p'_{22}(-35) = -0,31272\dots < 0.$$

Значит, функция $p_{22}(x)$ убывает при $x \in [-35; -19]$, то есть наибольшее значение принимает в точке $x = -35$. Следовательно,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_1^4(\lambda)| \leqslant p_{22}(-35) = 35,68018\dots.$$

1.5. Оценка интеграла $I_1^5(\lambda)$.

Совершим замену $\zeta = zn = (-19+iy)n - 0,5$, тогда

$$I_1^5(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-19n-\frac{1}{2}}^{-19n-\frac{1}{2}+i22n} \varphi_+(z) e^{nf_+(z)}\, d\zeta = \frac{n}{2\pi} \int\limits_0^{22} \varphi_+(z) e^{nf_+(z)}\, dy.$$

Несложно проверить, что $y_{(-19)} = 10,53489\ldots$ — единственный корень уравнения $q''_{(-19)}(y) = 0$ при $y \in [0;22]$ и $q''_{(-19)}(y) > 0$ при $y \in [0; y_{(-19)}]$. Значит, функция $q'_{(-19)}(y)$ возрастает при $y \in [0; y_{(-19)}]$ и убывает при $y \in [y_{(-19)}; 22]$. Несложно проверить, что

$$q'_{(-19)}(0) = -\frac{\pi}{6} < 0 \quad \text{и} \quad q'_{(-19)}(11) = 0,77785 > 0\ldots.$$

Поэтому функция $q_{(-19)}(y)$ принимает наибольшее значение при $y = 11$ или $y = 0$. Несложно проверить, что при $y = 11$.

Для любого ε существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n > N$ выполняется

$$|q_{(-19)}(y) - q_{(-19-\frac{1}{2n})}(y)| \leqslant \varepsilon$$

при $y \in [0;22]$. Следовательно,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_1^5(\lambda)| \leqslant q_{(-19)}(11) = 26,75095\ldots.$$

1.6. Оценка интеграла $I_1^6(\lambda)$.

Совершим замену $\zeta = zn = (-19+iy)n - 0,5$, тогда

$$I_1^6(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-19n-\frac{1}{2}-i\infty}^{-19n-0,5} \varphi_-(z) e^{nf_-(z)}\, d\zeta = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_-(z) e^{nf_-(z)}\, dy.$$

Несложно проверить, что

$$q'_{(-19-\frac{1}{2n})}(y) \geqslant -\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

при $y \leqslant 0$. Отсюда

$$q_{(-19-\frac{1}{2n})}(y) - q_{(-19-\frac{1}{2n})}(0) = q'_{(-19-\frac{1}{2n})}(\theta) \cdot (y-0) \leqslant \\ \leqslant q_{(-19-\frac{1}{2n})}(y_{(-19)}) \cdot (y-0) \leqslant \frac{\pi}{3} y$$

для некоторого числа $\theta = \theta(y)$, $y \leqslant \theta \leqslant 0$. При достаточно большом n

$$|I_1^1(\lambda)| \leqslant \left| \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_-(z) e^{n \operatorname{Re} f_-(z)} dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| e^{q_{(-19-\frac{1}{2n})}(0)n} \int\limits_{-\infty}^{0} y^3 e^{\left(q_{(-19-\frac{1}{2n})}(y) - q_{(-19-\frac{1}{2n})}(0)\right)n} dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| e^{q_{(-19-\frac{1}{2n})}(0)n} \int\limits_{-\infty}^{0} y^3 e^{\frac{\pi}{3} yn} dy \right| \leqslant C_{12} e^{q_{(-19-\frac{1}{2n})}(0)n}.$$

Для любого ε существует такое число $N > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$|q_{(-19)}(0) - q_{(-19-\frac{1}{2n})}(0)| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln |I_1^6(\lambda)| \leqslant q_{(-19)}(0) = 22,12611\ldots.$$

Из всех предыдущих оценок получаем

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln |I_1'(\lambda)| =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln |I_1^1(\lambda) + I_1^2(\lambda) + I_1^3(\lambda) + I_1^4(\lambda) + I_1^5(\lambda) + I_1^6(\lambda)| =$$

$$= \operatorname{Re} h(z_1) = 35,74009\ldots.$$

Оценим асимптотику суммы $I_1''(\lambda)$.

2. Оценка суммы $I_1''(\lambda)$.

Несложно проверить, что функция

$$r(x) = \frac{(x-14)(x-12)(x-10)}{x(x-2)(x-4)|\lambda|}$$

возрастает при $x \in [14; +\infty)$ и $r(x) = 1$ при $x = 61,81593\ldots$. Значит,

$$\frac{A(-k)|\lambda|^k}{A(-k-1)|\lambda|^{k+1}} = \frac{\left(\frac{k}{n} - 14 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - 12 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - 10 - \frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - 1\right)\left(\frac{k}{n} - 2\right)|\lambda|} < 1$$

при $14n+2 \leqslant k \leqslant 19n$. Отсюда

$$|I_1''(\lambda)| \leqslant \sum_{k=14n+2}^{19n} |A(-k)||\lambda|^k \leqslant$$
$$\leqslant 5n \max_{14n+2\leqslant k\leqslant 19n} \left(|A(-k)||\lambda|^k\right) = 5n\,|A(-19n)|\,|\lambda|^{19n}.$$

Пользуясь формулой (1.58) Стирлинга, получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(|A(-19n)||\lambda|^{19n}\right) = \ln\left(\frac{19^{19}}{14^{14}5^5}\frac{17^{17}}{10^{10}7^7}\frac{15^{15}}{6^6 9^9}\right) - 19\ln\sqrt{3} = 22,12611\ldots.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|I_1''(\lambda)| \leqslant 22,12611\ldots.$$

Из всех предыдущих оценок получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|I_1(\lambda)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|I_1'(\lambda) + I_1''(\lambda)| = \operatorname{Re} h(z_1) = 35,74009\ldots.$$

Предложение 5 доказано. □

2.4 Асимптотика $J_2(\lambda)$

В предложении 6 определяется величина $m(\lambda)$.

Предложение 6. *Справедливо равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|J_2(\lambda)| = \operatorname{Re}|h(z_2)| + 7\ln\sqrt{3} = m(\lambda) = -15,54386\ldots.$$

Доказательство предложения 6. Так как $J_2(\lambda)$ отличается от $I_2(\lambda)$ множителем λ^{-7n-1} (см. (1.4)), то достаточно доказать

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|I_2(\lambda)| = \operatorname{Re}|h(z_3)|$$

Доказательство предложения 6 состоит из двух частей. В первой части мы выберем контур интегрирования L_2'. Контур интегрирования L_2' будет представлять собой ломаную, состоящую из отрезков и двух лучей, при этом один из лучей будет проходить через точку nz_2, а другой — через точку nz_3 (z_2, z_3 — корни уравнения (2.8)). Также мы покажем, что если в интеграле $I_2(\lambda)$ поменять вертикальный (см. (1.5)) контур L_2 на L_2', то значение интеграла не изменится. Во второй части мы посчитаем асимптотику интеграла $I_2(\lambda)$.

1 часть доказательства предложения 6.

Рассмотрим интеграл $I_2'(\lambda)$

$$I_2'(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2'} \Psi_2(\zeta)d\zeta,$$

где контур L_2' проходит через точки nz_2, nz_3 и состоит из следующих частей (интегрирование происходит "снизу вверх", но порядок, в котором перечислены участки обратный):

1) Вертикальный луч $\Gamma_1 = [x_3n; x_3n + i\infty)$, этот луч содержит точку z_3n.

2) Горизонтальный отрезок $\Gamma_2 = [x_2n; x_3n]$.

3) Вертикальный луч $\Gamma_3 = (x_2n - i\infty; x_2n]$, этот луч содержит точку z_2n.

Определим интегралы

$$I_2^k(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} \Psi_2(\zeta)d\zeta, \text{ где } k \in \{1, 2, 3\}.$$

Тогда

$$I_2'(\lambda) = I_2^1(\lambda) + I_2^2(\lambda) + I_2^3(\lambda).$$

Покажем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2'} \Psi_2(\zeta)d\zeta = I_2'(\lambda) = I_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} \Psi_2(\zeta)d\zeta, \tag{2.21}$$

где в качестве контура L_2 выбрана вертикальная прямая

$$L_2 = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = x_2n + iy, -\infty < y < +\infty\}.$$

Для этого рассмотрим натуральное число M и точки

$$A = (x_3n; M),\ B = (x_2n; M),\ C = (x_2n; 0),\ D = (x_3n; 0).$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ABCDA} \Psi_2(\zeta)d\zeta = 0,$$

так как внутри контура $ABCDA$ нет полюсов у функции $\Psi_2(\zeta)$. Поэтому чтобы установить справедливость равенства (2.21) достаточно доказать, что

$$\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{AB}\Psi_2(\zeta)d\zeta=0. \tag{2.22}$$

Для этого оценим $\Psi_2(\zeta)$. Через C_i будем обозначать некоторые положительные константы; если в скобках указана переменная n, то константа зависит от n. Считаем, что $\zeta=\sigma+iM$.
При достаточно большом M и $\zeta\in AB$ получаем

$$|A(\zeta)|<(|\zeta|+14n+1)^{30n+3}<C_1(n)|\zeta|^{30n+3},\ \text{поскольку } |\zeta|\geqslant C_2n,$$

$$\left|\left(\frac{\pi}{\sin\pi\zeta}\right)^2\right|<C_3e^{-2M\pi},\ \text{так как } M>\frac{1}{\pi},$$

$$|(\lambda)^{-\zeta}|=e^{-\sigma\ln|\lambda|+M\arg\lambda}=\lambda^{-\sigma}e^{-M\pi/6}.$$

Отсюда при $\zeta\in AB$ мы находим, что

$$|\Psi_2(\zeta)|<C_4(n)|\zeta|^{30n+3}\lambda^{-\sigma}e^{-13M\pi/6}. \tag{2.23}$$

Интегрируя (2.23) по AB и устремляя M к бесконечности, получаем, что выполнено равенство (2.22). Следовательно, (2.21) тоже верно.

2 часть доказательства предложения 6.

Приведем некоторые вычисления, которые будут нужны при подсчете асимптотики.

Используя свойства (1.61) гамма-функции, получаем

$$\Psi_2(\zeta)=-\frac{\Gamma(\zeta+14n+2)\Gamma(-\zeta)}{\Gamma(14n+2)}\frac{\Gamma(\zeta+12n+2)\Gamma(-\zeta-2n)}{\Gamma(10n+2)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\zeta+10n+2)\Gamma(-\zeta-4n)}{\Gamma(6n+2)}\left(\frac{\sin\pi\zeta}{\pi}\right)e^{-\zeta\ln\lambda}.$$

Введем обозначение $\zeta=zn$. Отметим, что в последующих выражениях константа в $O\left(n^{-1}\right)$ не зависят от z. На основании формулы (1.58) Стирлинга и равенств

$$\mathrm{Re}^{-1}(-\zeta)=O\left(n^{-1}\right)>0,\ \mathrm{Re}^{-1}(\zeta+14n+2)=O\left(n^{-1}\right)>0,$$
$$\mathrm{Re}^{-1}(-\zeta-2n)=O\left(n^{-1}\right)>0,\ \mathrm{Re}^{-1}(\zeta+12n+2)=O\left(n^{-1}\right)>0,$$
$$\mathrm{Re}^{-1}(-\zeta-4n)=O\left(n^{-1}\right)>0,\ \mathrm{Re}^{-1}(\zeta+10n+2)=O\left(n^{-1}\right)>0$$

при $\zeta \in L_2'$ получаем

$$\Psi_2(\zeta) = \varphi_+(z)e^{nf_+(z)} = \varphi_-(z)e^{nf_-(z)} = \varphi_0(z)e^{nf_0(z)},$$

где

$$\begin{aligned}
f_+(z) &= (z+14)\ln(z+14) - z\ln(-z)+\\
&+(z+12)\ln(z+12) - (z+2)\ln(-z-2)+\\
&+(z+10)\ln(z+10) - (z+4)\ln(-z-4) - \ln 14^{14}10^{10}6^6 - z\ln\lambda - z\pi i,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\varphi_+(z) = -\frac{e^{2\pi izn}-1}{2\pi i}\sqrt{\frac{(2\pi)^3(z+14)^3(z+12)^3(z+10)^3}{840^3n^3(-z)(-z-2)(-z-4)}}\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right),$$

$$f_-(z) = f_+(z) + 2z\pi i,\ \varphi_-(z) = e^{-2\pi inz}\varphi_+(z),$$

$$f_0(z) = f_+(z) + z\pi i,\ \varphi_0(z) = e^{-\pi inz}\varphi_+(z).$$

Найдем производную $f_+'(z)$ и вторую производную $f_+''(z)$

$$f_+'(z) = \ln(z+14)+\ln(z+12)+\ln(z+10)-\ln(-z)-\ln(-z-2)-\ln(-z-4)-\ln\lambda-\pi i,$$

$$f_+''(z) = \frac{1}{z+14}+\frac{1}{z+12}+\frac{1}{z+10}-\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+4}.$$

Найдем производную $f_-'(z)$ и вторую производную $f_-''(z)$

$$f_-'(z) = f_-'(z) + 2\pi i \text{ и } f_-''(z) = f_-''(z).$$

Для каждого действительного x_0 определим функцию

$$q_{x_0}(y) = \begin{cases} \operatorname{Re} f_+(z) & , \text{ если } y>0,\\ \operatorname{Re} f_0(z) & , \text{ если } y=0,\\ \operatorname{Re} f_-(z) & , \text{ если } y<0,\end{cases}$$

где $z = x_0 + iy$. Для каждого действительного x_0 определим функцию

$$\begin{aligned}
s_{x_0}(y) = &-\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x_0+14}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x_0+12}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x_0+10}\right) -\\
&-\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{-x_0}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{-x_0-2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{-x_0-4}\right) + \frac{5\pi}{6}.
\end{aligned}$$

В случае $y > 0$ имеем

$$q'_{x_0}(y) = \operatorname{Re}\left[\frac{\partial f_+(z)}{\partial y}\right] = -\operatorname{Im}\left[\frac{\partial f_+(z)}{\partial z}\right] = s_{x_0}(y). \tag{2.25}$$

А в случае $y < 0$ получаем

$$q'_{x_0}(y) = s_{x_0}(y) - 2\pi. \tag{2.26}$$

Определим функцию

$$p_0(x) = \operatorname{Re} f_0(z),$$

где $z = x$. Найдем производную $p'_0(x)$

$$\begin{aligned} p'_0(x) = \operatorname{Re}\left[\frac{\partial f_0(z)}{\partial x}\right] = &\operatorname{Re}\left[\frac{\partial f_0(z)}{\partial z}\right] = \\ = &\frac{1}{2}\ln\frac{(x+14)^2(x+12)^2(x+10)^2}{x^2(x+2)^2(x+4)^2|\lambda|}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Посчитаем асимптотику $I_2(\lambda)$. Главный член асимптотики $I_2(\lambda)$ совпадает с главным членом асимптотики $I_2^3(\lambda)$.

Отметим, что часть вычислений при подсчете асимптотики совершены с помощью компьютера.

Будем использовать неравенство

$$|\varphi_0(z)| \leqslant C_5 n^{-3/2}|z|^3 \text{ при } \zeta \in \Gamma_2,$$

которое верно для некоторой положительной $C_5 > 0$.

Рассмотрим несколько случаев. Основная идея состоит в том, чтобы оценить асимптотики интегралов $I_2^k(\lambda)$ с помощью наибольших значений $\operatorname{Re} f_+(z)$, $\operatorname{Re} f_-(z)$, $\operatorname{Re} f_0(z)$ на соответствующих промежутках (именно поэтому были введены функции $q_{x_0}(y)$ и $p_0(x)$).

1. Асимптотика интеграла $I_2^1(\lambda)$.

Совершим замену $\zeta = zn = (x_3 + iy)n$, тогда

$$I_2^1(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x_3 n}^{x_3 n + i\infty} \varphi_+(z) e^{n f_+(z)} d\zeta = \frac{n}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} \varphi_+(z) e^{n f_+(z)}\, dy.$$

Так как z_3 — корень уравнения (2.8), то

$$e^{f'_+(z_3)} = \frac{(z_3+14)(z_3+12)(z_3+10)}{z_3(z_3+2)(z_3+4)\lambda} = 1. \tag{2.28}$$

Тогда $f'_+(z_3) = 2\pi ik$. Учитывая точное значение z_3 и пользуясь (2.25), при $y \geqslant 0$ получаем

$$-2\pi < -\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} < q'_{x_3}(y) \leqslant \pi - \frac{\pi}{6} < 2\pi.$$

Следовательно, $q'_{x_3}(y_3) = -\operatorname{Im}[f'_+(z_3)] = 0$ (см. (2.25)) и $f'_+(z_3) = 0$. Кроме того, $q'_{x_3}(y)$ — функция убывающая. То есть функция $q_{x_3}(y)$ принимает наибольшее значение в точке $y = y_3$ при $y \in [0; +\infty)$. Значит, при $\zeta \in \Gamma_1$ выполняется

$$f_+(z) = f_+(z_3) - \frac{f''_+(z_3)}{3}(y - y_3)^2 + O((y - y_3)^3).$$

Так как $\operatorname{Re}\ f''_+(z_3) = 1,05077\dots > 0$, то из теоремы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_2^1(\lambda)| = \operatorname{Re}\ f_+(z_3) = \operatorname{Re}\ h(z_3) = -22,13281\dots.$$

Второе равенство верно ввиду (2.24) и (2.28).

2. Оценка интеграла $I_2^2(\lambda)$.

Совершим замену $\zeta = zn = xn$, тогда

$$I_2^3(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x_2 n}^{x_3 n} \varphi_0(z) e^{nf_0(z)}\, d\zeta = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{x_2}^{x_3} \varphi_0(z) e^{nf_0(z)}\, dx.$$

Несложно проверить, что уравнение $p'_0(x) = 0$ имеет корень $x_0 = -7.25587\dots$. Из (2.27) следует, что $p'_0(x)$ — возрастающая функция при $x \in [x_3; x_2]$. Значит, учитывая точные значения x_2 и x_3, заключаем, что функция $p_0(x)$ достигает максимум в точке $x = x_2$. Следовательно,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_2^3(\lambda)| \leqslant p_0(x_2) = -28.69909\dots.$$

3. Асимптотика для интеграла $I_2^3(\lambda)$.

Совершим замену $\zeta = zn = (x_2 + iy)n$, тогда

$$I_2^3(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x_2 n}^{x_2 n - i\infty} \varphi_-(z) e^{nf_-(z)}\, d\zeta = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_-(z) e^{nf_-(z)} dy.$$

Так как z_2 — корень уравнения (2.8), то

$$e^{f'_-(z_2)} = \frac{(z_2 + 14)(z_2 + 12)(z_2 + 10)}{z_2(z_2 + 2)(z_2 + 4)\lambda} = 1. \qquad (2.29)$$

Тогда $f'_-(z_2) = 2\pi ik$. Пользуясь (2.26), при $y \leqslant 0$ получаем

$$-2\pi < \frac{5\pi}{6} - 2\pi < q'_{x_2}(y) \leqslant 3\pi + \pi - \frac{\pi}{6} - 2\pi < 2\pi.$$

Следовательно, $q'_{y_2}(y_2) = 0 = -\operatorname{Im}[f'_-(z_2)] = 0$ (см. (2.26)) и $f'_-(z_2) = 0$. Кроме того, $q'_{x_2}(y)$ — функция убывающая. То есть функция $q_{x_2}(y)$ принимает наибольшее значение в точке $y = y_2$ при $y \in (-\infty; 0]$. Значит, при $\zeta \in \Gamma_3$ выполняется

$$f_-(z) = f_-(z_2) - \frac{f''_-(z_2)}{2}(y - y_2)^2 + O((y - y_2)^3).$$

Так как $\operatorname{Re}\ f''_-(z_2) = 0,82501\dots > 0$, то из теоремы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_2^3(\lambda)| = \operatorname{Re}\ f_-(z_2) = \operatorname{Re}\ h(z_2) = -19,389\dots.$$

Второе равенство верно ввиду (2.24) и (2.29).

Из всех предыдущих оценок получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_2(\lambda)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_2^1(\lambda) + I_2^2(\lambda) + I_2^3(\lambda)| = \operatorname{Re} h(z_2) = -19,389\dots.$$

Предложение 6 доказано. □

2.5 Совместные приближения $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$

Получена оценка сверху показателя совместного приближения чисел $\ln 3$ и $\pi/\sqrt{3}$.

Теорема 6. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $q(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для любых p_1, p_2, $q \in \mathbb{Z}$, $q(\varepsilon) \leqslant q$, выполняется*

$$\max\left\{\left|\ln 3 - \frac{p_1}{q}\right|, \left|\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{p_2}{q}\right|\right\} \geqslant q^{-\mu-\varepsilon},$$

где $\mu = 3,86041\dots$.

Доказательство теоремы 6 будет основано на лемме 14.

Лемма 14. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $l_n = q_n\alpha + p_n$, где $q_n, p_n \in \mathbb{Z}\,[i\sqrt{m}]$. Известно, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |q_n| = \sigma, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |l_n| = -\tau, \quad \sigma, \tau > 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $q(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для любых p, $q \in \mathbb{Z}[i\sqrt{m}]$, $|q| \geqslant q(\varepsilon)$, выполняется

$$|p + q\alpha| \geqslant |q|^{-\left(\frac{\sigma}{\tau}+\varepsilon\right)}.$$

Доказательство леммы 14. Очевидно, что существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $q_n \neq 0$, $l_n \neq 0$ для любого $n \geqslant n_0$.

Пусть $A = p + q\alpha$, для некоторых p, $q \in \mathbb{Z}[i\sqrt{m}]$, $(p, q) \neq (0, 0)$. Тогда

$$A = p + q\left(\frac{l_n - p_n}{q_n}\right) = \frac{pq_n - qp_n}{q_n} + \frac{ql_n}{q_n} = \frac{B_n}{q_n} + \frac{w_n}{q_n}$$

Покажем, что множество $\Pi = \{n \geqslant 1 : B_n \neq 0\}$ бесконечно. Если Π конечно, тогда $B_n = 0$ для любого $n \geqslant n_1$, где $n_1 \geqslant n_0$. Так как $|q_n| \geqslant 1$ и $w_n \to 0$ при $n \to +\infty$, то $A = 0$. Тогда $q = 0$, $p = 0$. Получили противоречие. Значит, множество Π бесконечно.

Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое число δ, что

$$0 < \delta = \delta(\varepsilon) < \min\left\{\frac{\tau}{3}, \sigma\right\}, \ \frac{\sigma+\delta}{\tau-\delta} < \frac{\sigma+\delta}{\tau-3\delta} < \frac{\sigma}{\tau} + \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\sigma}{\tau}\right\} \tag{2.30}$$

Из условия леммы следует, что существует такое $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $n(\varepsilon) \geqslant n_0$, что

$$e^{(\sigma-\delta)n} \leqslant |q_n| \leqslant e^{(\sigma+\delta)n}, \ |l_n| \leqslant e^{-(\tau-\delta)n}$$

для любого $n \geqslant n(\varepsilon)$.

Определим числа

$$q(\varepsilon) = \min\{N \in \mathbb{N} : 2N \geqslant e^{(\tau-\delta)n(\varepsilon)}, \quad N^{\varepsilon\tau} \geqslant (2e^{\sigma+\tau})^{2\tau+4\sigma}\},$$

$$n(q) = \min\{n \in \mathbb{N} : n > n(\varepsilon), 2|q| < e^{(\tau-\delta)n}\}$$

для любого $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q(\varepsilon)$.

Так как $|w_n| \leqslant |q|e^{-(\tau-\delta)n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n(\varepsilon)$, то $|w_n| < 1/2$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n(q)$, и $q \in \mathbb{Z}$, $q \geqslant q(\varepsilon)$. Поэтому

$$|A| = \left|\frac{B_n + w_n}{q_n}\right| \geqslant \frac{1 - |w_n|}{|q_n|} > \frac{1}{2|q_n|} \geqslant \frac{1}{2}e^{-(\sigma+\delta)n} \tag{2.31}$$

для любого $n \in \Pi$, $n \geqslant n(q)$.

Рассмотрим следующих два случая.

1. Пусть $n(q) \in \Pi$. Из определения $q(\varepsilon)$ получаем

$$q(\varepsilon)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant 2^{-1-2\frac{\sigma}{\tau}} e^{-\left(1+\frac{\sigma}{\tau}\right)(\tau+2\sigma)} \leqslant 2^{-1-2\frac{\sigma}{\tau}} e^{-\sigma-\tau} \leqslant 2^{-1-2\frac{\sigma}{\tau}} e^{-\sigma-\delta}. \tag{2.32}$$

Из определения $n(q)$ имеем

$$2|q| \geqslant e^{(\tau-\delta)(n(q)-1)}.$$

Следовательно,

$$e^{n(q)} \leqslant e(2|q|)^{\frac{1}{\tau-\delta}}. \tag{2.33}$$

Тогда, используя (2.33), (2.32) и (2.30), получаем из неравенства (2.31) при $n = n(q)$, что для любого q, $|q| \geqslant q(\varepsilon)$, выполняется

$$|A| \geqslant \frac{1}{2} e^{-(\sigma+\delta)n(q)} \geqslant 2^{-1-\frac{\sigma+\delta}{\tau-\delta}} e^{-\sigma-\delta} |q|^{-\frac{\sigma+\delta}{\tau-\delta}} \geqslant$$
$$\geqslant 2^{-1-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\sigma}{\tau}} e^{-\sigma-\delta} |q|^{-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\varepsilon}{2}} \geqslant q(\varepsilon)^{-\frac{\varepsilon}{2}} |q|^{-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\varepsilon}{2}} \geqslant |q|^{-\frac{\sigma}{\tau}-\varepsilon}.$$

2. Пусть $n(q) \notin \Pi$. Из определения $q(\varepsilon)$ получаем

$$q(\varepsilon)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant (2e^{\sigma+\tau})^{-1-2\frac{\sigma}{\tau}} \leqslant (2e^{\sigma+\delta})^{-\left(1+\frac{\sigma+\delta}{\tau-3\delta}\right)}. \tag{2.34}$$

Найдем такое наименьшее $m(q) \in \mathbb{N}$, $m(q) > n(q)$, что $m(q) \in \Pi$. Поскольку $B_{m(q)-1} = 0$, то

$$|A| = \left|\frac{w_{m(q)-1}}{q_{m(q)-1}}\right| \leqslant |q| e^{-(\sigma+\tau-2\delta)(m(q)-1)}.$$

Отсюда

$$e^{m(q)} \leqslant e\left(\frac{|A|}{|q|}\right)^{-\frac{1}{\sigma+\tau-2\delta}}.$$

Рассмотрим неравенство (2.31) при $n = m(q)$, тогда получаем

$$|A| \geqslant \frac{1}{2} e^{-(\sigma+\delta)m(q)} \geqslant \frac{1}{2} e^{-(\sigma+\delta)} \left(\frac{|A|}{|q|}\right)^{\frac{\sigma+\delta}{\sigma+\tau-2\delta}}.$$

Отсюда

$$|A|^{1-\frac{\sigma+\delta}{\sigma+\tau-2\delta}} = |A|^{\frac{\tau-3\delta}{\sigma+\tau-2\delta}} \geqslant 2^{-1} e^{-(\sigma+\delta)} |q|^{-\frac{\sigma+\delta}{\sigma+\tau-2\delta}}.$$

Используя (2.30) и (2.34), получаем, что

$$|A| \geqslant (2e^{\sigma+\delta})^{-\frac{\sigma+\tau-2\delta}{\tau-3\delta}} |q|^{-\frac{\sigma+\delta}{\tau-3\delta}} = (2e^{\sigma+\delta})^{-\left(1+\frac{\sigma+\delta}{\tau-3\delta}\right)} |q|^{-\frac{\sigma+\delta}{\tau-3\delta}} \geqslant$$
$$\geqslant q(\varepsilon)^{-\frac{\varepsilon}{2}} |q|^{-\frac{\sigma}{\tau}-\frac{\varepsilon}{2}} \geqslant |q|^{-\frac{\sigma}{\tau}-\varepsilon}.$$

Лемма 14 доказана. □

Следствие 4. *Если выполнены условия леммы 14, то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $q_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *что для любых* p_1, p_2, $q_1 \in \mathbb{Z}$, $q_0(\varepsilon) \leqslant q_1$, *выполняется*

$$\max\left\{\left|\alpha_1 - \frac{p_1}{q_1}\right|, \left|\alpha_2\sqrt{m} - \frac{p_2}{q_1}\right|\right\} \geqslant q_1^{-\left(1+\frac{\sigma}{\tau}+\varepsilon\right)}.$$

Доказательство следствия 4. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмем такие числа q_1, p_1, $p_2 \in \mathbb{Z}$, что

$$q_1 \geqslant \max\left\{\frac{q(\varepsilon/2)}{m}; m^{2/\varepsilon+2\sigma/(\tau\varepsilon)+1}2^{1/\varepsilon}\right\} = q_0(\varepsilon),$$

где $q(\varepsilon/2)$ удовлетворяет условиям леммы 14. Определим числа $q = q_1 m$, $p = -(p_1 m + i\sqrt{m}p_2)$. Тогда в силу леммы 14 выполняется неравенство

$$|p + q\alpha| \geqslant |q|^{-\left(\frac{\sigma}{\tau}+\varepsilon/2\right)}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{2}\max\left\{\left|\alpha_1 - \frac{p_1}{q_1}\right|, \left|\alpha_2\sqrt{m} - \frac{p_2}{q_1}\right|\right\} \geqslant \sqrt{2}\max\left\{\left|\alpha_1 - \frac{p_1 m}{q_1 m}\right|, \left|\alpha_2 - \frac{\sqrt{m}p_2}{q_1 m}\right|\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \left|\alpha + \frac{p}{q}\right| \geqslant |q|^{-\left(1+\frac{\sigma}{\tau}+\varepsilon/2\right)} \geqslant \sqrt{2}q_1^{-\left(1+\frac{\sigma}{\tau}+\varepsilon\right)}.$$

То есть получаем требуемое.

Следствие 4 доказано. □

Замечание. Если известно, что $\alpha \notin \mathbb{Q}(i\sqrt{m})$, то в формулировках леммы 14 и следствия 4 условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|l_n| = -\tau$$

можно заменить на

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|l_n| \leqslant -\tau.$$

Доказательство теоремы 6. Рассмотрим последовательность

$$l_n = 4R_{n,2}D_2\Lambda J_2(\lambda) = 2R_{n,2}D_2\Lambda U_1(\lambda)\cdot\left(-\ln 3 - i\frac{\pi}{3}\right) - 4R_{n,2}D_2\Lambda U_2(\lambda) = p_n\alpha + q_n$$

Из леммы 13 следует, что p_n, $q_n \in \mathbb{Z}\left[i\sqrt{3}\right]$.

Из предложений 5 и 6 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|q_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|2R_{n,2}D_2\Lambda U_1(\lambda)| =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|2R_{n,2}D_2\Lambda J_1(\lambda)| = N_2 + M_2 + M(\lambda),$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|l_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|4R_{n,2}D_2\Lambda J_2(\lambda)| = N_2+M_2+m(\lambda).$$

Здесь (см. (2.3), (1.42))

$$N_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(R_{n,2}) = 5\ln\sqrt{3},$$
$$M_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln D_2.$$

Пользуясь компьютером, можно найти множество Ω_1 (см. (1.31) для значений параметров (2.1))

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{12};\frac{3}{14}\right)\bigcup\left[\frac{1}{4};\frac{5}{14}\right)\bigcup\left[\frac{3}{8};\frac{3}{7}\right)\bigcup\left[\frac{7}{12};\frac{5}{7}\right)\bigcup\left[\frac{3}{4};\frac{6}{7}\right)\bigcup\left[\frac{7}{8};\frac{13}{14}\right).$$

Пользуясь (1.31), (1.32), (1.42), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_2 = 14 - \left(\psi\left(\frac{3}{14}\right)-\psi\left(\frac{1}{12}\right)+\dots+\psi\left(\frac{13}{14}\right)-\psi\left(\frac{7}{8}\right)\right) = 4,00979\dots.$$

Отсюда из следствия 4 получаем, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $q(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что для любых p_1, p_2, $q\in\mathbb{Z}$, $q(\varepsilon)\leqslant q$, выполняется

$$\max\left\{\left|\ln 3-\frac{p_1}{q}\right|,\left|\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{p_2}{q}\right|\right\}\geqslant q^{-\mu-\varepsilon},$$

где

$$\mu = 1-\frac{N_2+M_2+M(\lambda)}{N_2+M_2+m(\lambda)} = 3,86041\dots.$$

Теорема 6 доказана. $\square$

Замечание. Если в качестве параметров выберем

$$t=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi i}{4}} \text{ и } a_2=2, a_3=4, b_1=14,$$

то, рассуждая аналогично, мы можем получить факт, касающийся совместного приближения $\ln 2$ и π, а именно:

Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $q(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что для любых p_1, p_2, $q\in\mathbb{Z}$, $q(\varepsilon)\leqslant q$, выполняется

$$\max\left\{\left|\ln 2-\frac{p_1}{q}\right|,\left|\pi-\frac{p_2}{q}\right|\right\}\geqslant q^{-\mu-\varepsilon},$$

где $\mu = 4,11763\dots$.

Этот факт очевиден ввиду того, что $\mu(\ln 2)\leqslant 3,57455\dots$. Последнее неравенство было доказано в статьях [29] и [10].

3 Оценки квадратичных показателей иррациональности α_k и β_k

Получены оценки сверху квадратичных показателей иррациональности чисел α_k и β_k (см. (8) и (9)).

В третьей главе все обозначения, введенные в первой главе, переопределяются и некоторые из них приобретут другой смысл. Обозначения, которые вводятся при доказательстве какого-то утверждения (леммы, следствия, предложения, теоремы), не будут использоваться при доказательстве других утверждений. Общие для всей главы обозначения вводятся вне доказательств.

3.1 Основные определения

Через l будем обозначать любое число из множества $\{1, 2, 3\}$.

Определим многочлен $A(x)$ следующим образом:

$$A(x) = \binom{x + b_1 n + 1}{c_1 n + 1}\binom{x + b_2 n + 1}{c_2 n + 1}\binom{x + b_3 n + 1}{c_3 n + 1}\binom{x + b_4 n + 1}{c_4 n + 1} =$$

$$= \frac{(x + a_1 n + 1)\dots(x + b_1 n + 1)}{(c_1 n + 1)!}\frac{(x + a_2 n + 1)\dots(x + b_2 n + 1)}{(c_2 n + 1)!} \times$$
$$\times \frac{(x + a_3 n + 1)\dots(x + b_3 n + 1)}{(c_3 n + 1)!}\frac{(x + a_4 n + 1)\dots(x + b_4 n + 1)}{(c_4 n + 1)!}.$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$, выбраны целые неотрицательные параметры

$$\begin{gathered} a_1 = 0 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 < b_4 \leqslant b_3 \leqslant b_2 \leqslant b_1, \\ c_1 = b_1 - a_1 = b_1, c_2 = b_2 - a_2, c_3 = b_3 - a_3, c_4 = b_4 - a_4, \\ b_1 = b_1 + a_1 = b_2 + a_2 = b_3 + a_3 = b_4 + a_4, \end{gathered} \tag{3.1}$$

при этом b_1 — четное. Нетрудно заметить, что a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3, 4$, однозначно определяются через a_2, a_3, a_4, b_1.

Обозначим степень многочлена $A(x)$ через $N = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)n + 4$. Отметим важное свойство многочлена $A(x)$

$$A(x) = A(-x - b_1 n - 2). \tag{3.2}$$

Рассмотрим интегральные представления функций $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$, $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$

$$J_l(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} I_l(t) = \frac{t^{-\frac{b_1 n+2}{2}}}{2\pi i} \int_{L_l} \Psi_l(\zeta) d\zeta, \tag{3.3}$$

здесь $t \neq 0$, вертикальные прямые L_1, L_2, L_3 задаются следующим образом:

$$L_l = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = d_l n + iy, -\infty < y < +\infty\}, \text{ где } -b_l < d_l < -a_l,$$

и эти прямые проходятся снизу вверх.

В (3.3) функции $\Psi_1(\zeta), \Psi_2(\zeta), \Psi_3(\zeta)$ определены равенствами

$$\Psi_1(\zeta) = A(\zeta) \left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right) (-t)^{-\zeta}, \tag{3.4}$$

$$\Psi_2(\zeta) = A(\zeta) \left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right)^2 t^{-\zeta}, \tag{3.5}$$

$$\Psi_3(\zeta) = A(\zeta) \left(\frac{\pi}{\sin \pi\zeta}\right)^3 (-t)^{-\zeta}. \tag{3.6}$$

Здесь мы полагаем

$$(-t)^{-\zeta} = e^{-\zeta \ln(-t)} \text{ и } t^{-\zeta} = e^{-\zeta \ln t},$$

где выбираются ветви логарифмов

$$\ln(-t) = \ln|t| + i \arg t + i\pi \text{ и } \ln t = \ln|t| + i \arg t$$

с соответствующими условиями на аргумент

$$-2\pi < \arg t < 0 \text{ для (3.4)},$$
$$-2\pi < \arg t < 2\pi \text{ для (3.5)},$$
$$-4\pi < \arg t < 2\pi \text{ для (3.6)}.$$

3.2 Функциональные свойства $J_1(t), J_2(t), J_3(t)$

Многочлены $A_1(x), A_2(x)$ и $A_3(x)$ определим равенством

$$A_l(x) = A(x - a_l n). \tag{3.7}$$

Предложение 7. *Для любого $t \in \mathbb{C}$ с условием $0 < |t| \leqslant 1$ (кроме случаев, оговоренных ниже) выполняются равенства*

$$J_1(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} I_1(t) = -U_1(t), \tag{3.8}$$

$$J_2(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} I_2(t) = U_1(t)\ln t - U_2(t), \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered} J_3(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} I_3(t) = \\ = -\frac{1}{2}U_1(t)\ln^2 t + U_2(t)\ln t - \frac{1}{2}U_3(t) - i\pi(U_1(t)\ln t - U_2(t)). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Здесь $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t) \in \mathbb{Q}(t)$, а также $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t) \in \mathbb{Q}(t)$ определены следующим образом:

$$U_1(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} V_1(t) = t^{a_1 n - \frac{b_1 n+2}{2}} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{c_1 n+2} \sum_{j=c_1 n+1}^{N} e_j^{(1)} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{j-c_1 n-1},$$

$$\text{где } e_j^{(1)} = \sum_{k=c_1 n+2}^{j+1} (-1)^{k-1} A_1(-k) \binom{j}{k-1},$$

$$U_2(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} V_2(t) = t^{a_2 n - \frac{b_1 n+2}{2}} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{c_2 n+2} \sum_{j=c_2 n+1}^{N-1} e_j^{(2)} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{j-c_2 n-1},$$

$$\text{где } e_j^{(2)} = \sum_{k=c_2 n+2}^{j+1} (-1)^{k-1} A_2'(-k) \binom{j}{k-1},$$

$$U_3(t) = t^{-\frac{b_1 n+2}{2}} V_3(t) = t^{a_3 n - \frac{b_1 n+2}{2}} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{c_3 n+2} \sum_{j=c_3 n+1}^{N-2} e_j^{(3)} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{j-c_3 n-1},$$

$$\text{где } e_j^{(3)} = \sum_{k=c_3 n+2}^{j+1} (-1)^{k-1} A_3''(-k) \binom{j}{k-1}.$$

Ветвь логарифма выбирается так в обеих частях (3.8)–(3.10), что

$$\ln(-t) = \ln|t| + i\arg t + i\pi, \ \ln t = \ln|t| + i\arg t,$$

$$-2\pi < \arg t < 0 \text{ для (3.8)},$$

$$-2\pi < \arg t < 2\pi \text{ для (3.9)},$$

$$-4\pi < \arg t < 2\pi \text{ для (3.10)}.$$

Доказательство предложения 7 дословно совпадает с доказательством предложения 1.

Далее будут получены функциональные свойства $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$.

В работах [3], [20] была фактически доказана лемма 15 (см. лемму 3.2 в [3], см. предложение 1 в [20]). В настоящей диссертации будет приведено элементарное доказательство леммы 15.

Лемма 15. *Выполняются равенства*

$$U_1(t) = -U_1\left(\frac{1}{t}\right), U_2(t) = U_2\left(\frac{1}{t}\right), U_3(t) = -U_3\left(\frac{1}{t}\right).$$

Доказательство леммы 15. В силу (1.27) имеем

$$U_l(t) = -t^{-\frac{b_1n+2}{2}} \sum_{k=b_1n+2}^{+\infty} A^{(l-1)}(-k)t^k = -t^{-\frac{b_1n+2}{2}} \sum_{k=\frac{b_1n+2}{2}+1}^{+\infty} A^{(l-1)}(-k)t^k.$$

Пользуясь свойством (3.2) многочлена $A(x)$, получаем

$$A(x) = A(-x-b_1n-2), A\left(-\frac{b_1n+2}{2}\right) = 0, A'(x) = -A'(-x-b_1n-2),$$
$$A''(x) = A''(-x-b_1n-2), A''\left(-\frac{b_1n+2}{2}\right) = 0.$$

На основании следствия 1 заключаем, что справедливо утверждение леммы 15.

Лемма 15 доказана. □

Таким образом, получаем очевидное следствие 5 из лемм 15 и 4.

Следствие 5. *Справедливы равенства*

$$U_1(t) = \left(t-\frac{1}{t}\right)W_1\left(t+\frac{1}{t}\right), U_2(t) = W_2\left(t+\frac{1}{t}\right), U_3(t) = \left(t-\frac{1}{t}\right)W_3\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

для некоторых $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t) \in \mathbb{Q}(t)$.

3.3 Арифметические свойства $A(x)$

Будем обозначать через $\mathbb{P}$ множество простых чисел, через $\nu_p(f)$ степень вхождения числа $p \in \mathbb{P}$ в разложении числа $f \in \mathbb{Q}$ на простые множители.

Введем также обозначение для чисел $p \in \mathbb{P}$, $g \neq 0 \in \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{N}$

$$\nu_{p,a}(g) = \begin{cases} \nu_p(g) - a, & \text{если } \nu_p(g) \geqslant a, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для $\nu_{p,a}(g)$ доказано некоторое свойство в лемме 5.

В исследовании арифметических свойств многочлена $A(x)$ важную роль играет функция

$$\begin{aligned}\mu(x,y) = \big([x-a_1y] - [x-b_1y] - [c_1y]\big) + \\ +\big([x-a_2y] - [x-b_2y] - [c_2y]\big) + \\ +\big([x-a_3y] - [x-b_3y] - [c_3y]\big) + \\ +\big([x-a_4y] - [x-b_4y] - [c_4y]\big).\end{aligned}$$

Неравенство $\mu(x,y) \geqslant 0$ выполняется при любых x и y ввиду неравенства $[\alpha+\beta] \geqslant [\alpha] + [\beta]$, которое верно для любых α, $\beta \in \mathbb{R}$.
Обозначим через Ω_1 множество таких $0 \leqslant y < 1$, что при любом x выполняется неравенство

$$\mu(x,y) \geqslant 1, \tag{3.11}$$

обозначим через Ω_2 множество таких $0 \leqslant y < 1$, что при любом x выполняется неравенство

$$\mu(x,y) \geqslant 2. \tag{3.12}$$

Также определим множества

$$\Xi_1 = \left\{ p \in \mathbb{P} : p > \sqrt{c_1 n + 1}, \left\{\frac{n}{p}\right\} \in \Omega_1 \right\}, \tag{3.13}$$

$$\Xi_2 = \left\{ p \in \mathbb{P} : p > \sqrt{c_1 n + 1}, \left\{\frac{n}{p}\right\} \in \Omega_2 \right\}. \tag{3.14}$$

Для любого простого $p \in \Xi_1$ определим

$$w_p = \begin{cases} 2, & \text{если } p \in \Xi_2, \\ 1, & \text{если } p \notin \Xi_2. \end{cases}$$

Очевидно, что для любого простого $p \in \Xi_1$ и любого x верно

$$\mu\left(x, \left\{\frac{n}{p}\right\}\right) \geqslant w_p.$$

Обозначим через $\mathbb{J}$ множество нулей многочлена $A(x)$ с учетом их кратностей

$\mathbb{J} = \{a_1n{+}1, \ldots, b_1n{+}1; a_2n{+}1, \ldots, b_2n{+}1; a_3n{+}1, \ldots, b_3n{+}1; a_4n{+}1, \ldots, b_4n{+}1\}$.

Обозначим через $\mathbb{J}_k = \mathbb{J} \backslash \{k\}$. Под записью $i \neq j \in \mathbb{J}$ будем подразумевать, что i и j — это два различных элемента из $\mathbb{J}$, возможно, совпадающих численно.

Кроме того считаем, что

$$\Lambda = (c_1n + 1)(c_2n + 1)(c_3n + 1)(c_4n + 1).$$

Лемма 16. *Пусть $p \in \Xi_1$. Тогда справедливы утверждения.*

1) Для любого $k \in \mathbb{Z}$, $b_1n + 1 < k$, верно

$$\nu_p(A(-k)\Lambda) \geqslant \max_{i \neq j \in \mathbb{J}} \{\nu_p\left((j - k)(i - k)\right)\} + w_p - 2,$$
$$\nu_p(A(-k)\Lambda) \geqslant \max_{j \in \mathbb{J}_k} \{\nu_p(j - k)\} + w_p - 1,$$
$$\nu_p(A(-k)\Lambda) \geqslant w_p.$$

2) Для любого $k \in \mathbb{Z}$, $b_2n + 1 < k \leqslant b_1n + 1$, верно

$$\nu_p(A'(-k)\Lambda) \geqslant w_p - 1.$$

3) Для любого $k \in \mathbb{Z}$, $b_3n + 1 < k \leqslant b_2n + 1$, верно

$$\nu_p(A''(-k)\Lambda) \geqslant w_p - 2.$$

Доказательство леммы 16. Обозначим через

$$x = \frac{k-1}{p} \text{ и } y = \left\{\frac{n}{p}\right\}.$$

Здесь $p \in \Xi_1$, то есть $y \in \Omega_1$. Мы будем пользоваться тем, что $\mu(x, y) \geqslant w_p$.

1. При $b_1n + 1 < k$ выполняется

$$\begin{aligned} A(-k)\Lambda = &\frac{(k-1-a_1n)!}{(k-2-b_1n)!(c_1n)!}\frac{(k-1-a_2n)!}{(k-2-b_2n)!(c_2n)!}\times \\ &\times\frac{(k-1-a_3n)!}{(k-2-b_3n)!(c_3n)!}\frac{(k-1-a_4n)!}{(k-2-b_4n)!(c_4n)!}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Определим число Σ следующим образом:

$$\Sigma = \sum_{r=2}^{+\infty}\left(\left[\frac{k-1-a_1n}{p^r}\right]-\left[\frac{k-2-b_1n}{p^r}\right]-\left[\frac{c_1n}{p^r}\right]+\right.$$
$$+\left[\frac{k-1-a_2n}{p^r}\right]-\left[\frac{k-2-b_2n}{p^r}\right]-\left[\frac{c_2n}{p^r}\right]+$$
$$+\left[\frac{k-1-a_3n}{p^r}\right]-\left[\frac{k-2-b_3n}{p^r}\right]-\left[\frac{c_3n}{p^r}\right]+$$
$$\left.+\left[\frac{k-1-a_4n}{p^r}\right]-\left[\frac{k-2-b_4n}{p^r}\right]-\left[\frac{c_4n}{p^r}\right]\right)=$$

$$= \sum_{r=2}^{+\infty}\left(\left[\frac{k-1-a_1n}{p^r}\right]-\left[\frac{k-2-b_1n}{p^r}\right]+\right.$$
$$+\left[\frac{k-1-a_2n}{p^r}\right]-\left[\frac{k-2-b_2n}{p^r}\right]+$$
$$+\left[\frac{k-1-a_3n}{p^r}\right]-\left[\frac{k-2-b_3n}{p^r}\right]+$$
$$\left.+\left[\frac{k-1-a_4n}{p^r}\right]-\left[\frac{k-2-b_4n}{p^r}\right]\right)=$$
$$=\sum_{i\in\mathbb{J}}\nu_{p,1}(k-i)=\sum_{i\in\mathbb{J}_k}\nu_{p,1}(k-i).$$

Второе равенство выполняется из-за того, что $p^2 > c_1n+1$ (см. (3.13)), третье равенство в силу леммы 5, четвертое равенство верно, так как в данном случае $\mathbb{J}=\mathbb{J}_k$.

Отсюда получаем неравенства

$$\Sigma \geqslant \max_{i\neq j\in\mathbb{J}}\{\nu_p((i-k)(j-k))\}-2, \tag{3.16}$$

$$\Sigma \geqslant \max_{j\in\mathbb{J}_k}\{\nu_p(j-k)\}-1, \tag{3.17}$$

$$\Sigma \geqslant 0, \tag{3.18}$$

так как $\nu_{p,1}(k-i)\geqslant 0$ и $\nu_{p,1}(k-i)\geqslant \nu_p(k-i)-1$.

Тогда выполняется

$$\nu_p(A(-k)\Lambda) = \sum_{r=1}^{+\infty}\left(\left[\frac{k-1-a_1n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_1n}{p^r}\right] - \left[\frac{c_1n}{p^r}\right] + \right.$$
$$+\left[\frac{k-1-a_2n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_2n}{p^r}\right] - \left[\frac{c_2n}{p^r}\right] +$$
$$+\left[\frac{k-1-a_3n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_3n}{p^r}\right] - \left[\frac{c_3n}{p^r}\right] +$$
$$\left. +\left[\frac{k-1-a_4n}{p^r}\right] - \left[\frac{k-2-b_4n}{p^r}\right] - \left[\frac{c_4n}{p^r}\right]\right) \geqslant \mu(x,y) + \Sigma \geqslant w_p + \Sigma.$$

Используя неравенства (3.16)–(3.18), получаем требуемое в этом случае.

2. При $b_2n + 1 < k \leqslant b_1n + 1$ выполняется

$$A'(-k)\Lambda = (-1)^k \frac{(k-1-a_1n)!(b_1n+1-k)!}{(c_1n)!}\frac{(k-1-a_2n)!}{(k-2-b_2n)!(c_2n)!}\times$$
$$\times\frac{(k-1-a_3n)!}{(k-2-b_3n)!(c_3n)!}\frac{(k-1-a_4n)!}{(k-2-b_4n)!(c_4n)!}.$$

Далее мы воспользуемся тем, что при нецелом x верно $[x] = -[-x]-1$, а при целом $[x] = -[-x]$. Тогда при b_1n+1-k не кратном p верно

$$\left[\frac{b_1n+1-k}{p}\right] = -\left[\frac{k-1-b_1n}{p}\right] - 1 = -\left[\frac{k-2-b_1n}{p}\right] - 1, \tag{3.19}$$

а при $b_1n - k$ кратном p получаем

$$\left[\frac{b_1n+1-k}{p}\right] = -\left[\frac{k-1-b_1n}{p}\right] = -\left[\frac{k-2-b_1n}{p}\right] - 1. \tag{3.20}$$

Учитывая $p^2 > c_1n + 1$ (см. (3.13)), имеем

$$\nu_p(A'(-k)\Lambda) = \left[\frac{k-1-a_1n}{p}\right] + \left[\frac{b_1n+1-k}{p}\right] - \left[\frac{c_1n}{p}\right] +$$
$$+\left[\frac{k-1-a_2n}{p}\right] - \left[\frac{k-2-b_2n}{p}\right] - \left[\frac{c_2n}{p}\right] +$$
$$+\left[\frac{k-1-a_3n}{p}\right] - \left[\frac{k-2-b_3n}{p}\right] - \left[\frac{c_3n}{p}\right] +$$
$$+\left[\frac{k-1-a_4n}{p}\right] - \left[\frac{k-2-b_4n}{p}\right] - \left[\frac{c_4n}{p}\right] =$$

$$= \left[\frac{k-1-a_1 n}{p}\right] - \left[\frac{k-2-b_1 n}{p}\right] - \left[\frac{c_1 n}{p}\right] - 1 +$$
$$+ \left[\frac{k-1-a_2 n}{p}\right] - \left[\frac{k-2-b_2 n}{p}\right] - \left[\frac{c_2 n}{p}\right] +$$
$$+ \left[\frac{k-1-a_3 n}{p}\right] - \left[\frac{k-2-b_3 n}{p}\right] - \left[\frac{c_3 n}{p}\right] +$$
$$+ \left[\frac{k-1-a_4 n}{p}\right] - \left[\frac{k-2-b_4 n}{p}\right] - \left[\frac{c_4 n}{p}\right] \geqslant$$
$$\geqslant \mu(x,y) - 1 \geqslant w_p - 1.$$

3. При $b_3 n + 1 < k \leqslant b_2 n + 1$ выполняется

$$A''(-k)\Lambda = (-1)^{a_2 n} \frac{(k-1-a_1 n)!(b_1 n + 1 - k)!}{(c_1 n)!} \frac{(k-1-a_2 n)!(b_2 n + 1 - k)!}{(c_2 n)!} \times$$
$$\times \frac{(k-1-a_3 n)!}{(k-2-b_3 n)!(c_3 n)!} \frac{(k-1-a_4 n)!}{(k-2-b_4 n)!(c_4 n)!}.$$

Рассуждая точно также, как в (3.19) и (3.20), получаем

$$\left[\frac{b_1 n + 1 - k}{p}\right] = -\left[\frac{k-2-b_1 n}{p}\right] - 1 \quad \text{и} \quad \left[\frac{b_2 n + 1 - k}{p}\right] = -\left[\frac{k-2-b_2 n}{p}\right] - 1.$$

Тогда имеем

$$\nu_p(A''(-k)\Lambda) = \mu(x,y) - 2 \geqslant w_p - 2.$$

Лемма 16 доказана. □

Через d_k будем обозначать наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, k$.

Для любого $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, определим многочлен

$$H_m(x) = \frac{(x+1)\dots(x+m)}{m!}.$$

Для многочленов $H_m(x)$ доказано некоторое свойство в лемме 7.

Также введем обозначение

$$C = \max\left\{c_2 n + 1, \left[\frac{c_1 n + 1}{2}\right]\right\}. \tag{3.21}$$

Следствие 6. *Для любого $k \in \mathbb{Z}$*

$$d_{c_1 n + 1} A'(k) \in \mathbb{Z} \text{ и } d_C d_{c_1 n + 1} A''(k) \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство следствия 6. Ввиду леммы 7 получаем, что

$$d_{c_1n+1}A'(k) =$$
$$= \Big(d_{c_1n+1}H'_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big)H_{c_2n+1}(k+a_2n)H_{c_3n+1}(k+a_3n)H_{c_4n+1}(k+a_4n)+$$
$$+ H_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big(d_{c_1n+1}H'_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big)H_{c_3n+1}(k+a_3n)H_{c_4n+1}(k+a_4n)+$$
$$+ H_{c_1n+1}(k+a_1n)H_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big(d_{c_1n+1}H'_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big)H_{c_4n+1}(k+a_4n)+$$
$$+ H_{c_1n+1}(k+a_1n)H_{c_2n+1}(k+a_2n)H_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big(d_{c_1n+1}H'_{c_4n+1}(k+a_4n)\Big) \in \mathbb{Z}.$$

Ввиду леммы 7 получаем, что

$$d_Cd_{c_1n+1}A''(k) =$$
$$= \Big(d_Cd_{c_1n+1}H''_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big)H_{c_2n+1}(k+a_2n)H_{c_3n+1}(k+a_3n)H_{c_4n+1}(k+a_4n)+$$
$$+ H_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big(d_Cd_{c_1n+1}H''_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big)H_{c_3n+1}(k+a_3n)H_{c_4n+1}(k+a_4n)+$$
$$+ H_{c_1n+1}(k+a_1n)H_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big(d_Cd_{c_1n+1}H''_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big)H_{c_4n+1}(k+a_4n)+$$
$$+ H_{c_1n+1}(k+a_1n)H_{c_2n+1}(k+a_2n)H_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big(d_Cd_{c_1n+1}H''_{c_4n+1}(k+a_4n)\Big)+$$

$$+\Big(d_{c_1n+1}H'_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big)\Big(d_CH'_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big)H_{c_3n+1}(k+a_3n)H_{c_4n+1}(k+a_4n)+$$
$$+\Big(d_{c_1n+1}H'_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big)H_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big(d_CH'_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big)H_{c_4n+1}(k+a_4n)+$$
$$+\Big(d_{c_1n+1}H'_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big)H_{c_2n+1}(k+a_2n)H_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big(d_CH'_{c_4n+1}(k+a_4n)\Big)+$$
$$+H_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big(d_{c_1n+1}H'_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big)\Big(d_CH'_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big)H_{c_4n+1}(k+a_4n)+$$
$$+H_{c_1n+1}(k+a_1n)\Big(d_{c_1n+1}H'_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big)H_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big(d_CH'_{c_4n+1}(k+a_4n)\Big)+$$
$$+H_{c_1n+1}(k+a_1n)H_{c_2n+1}(k+a_2n)\Big(d_{c_1n+1}H'_{c_3n+1}(k+a_3n)\Big)\Big(d_CH'_{c_4n+1}(k+a_4n)\Big) \in \mathbb{Z}.$$

Следствие 6 доказано. □

Введем обозначение

$$\Delta_1 = \prod_{p\in\Xi_1} p, \quad \Delta_2 = \prod_{p\in\Xi_2} p, \; \Delta_1' = \prod_{\substack{p\in\Xi_1\\ p>C}} p, \tag{3.22}$$

$$D_1 = \frac{1}{\Delta_1\Delta_2}, \; D_2 = \frac{d_{c_1n+1}}{\Delta_1\Delta_2}, \; D_3 = d_C\Delta_1'\frac{d_{c_1n+1}}{\Delta_1\Delta_2}. \tag{3.23}$$

Лемма 17. *Для любого $k \in \mathbb{Z}$ верно*

$$A_1 = D_1 A(-k)\Lambda \in \mathbb{Z},\ A_2 = D_2 A'(-k)\Lambda \in \mathbb{Z} \text{ и } A_3 = D_3 A''(-k)\Lambda \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство леммы 17. Ввиду следствия 6 достаточно доказать, что для любого $p \in \Xi_1$ верно

$$\nu_p(A_1) \geqslant 0,\ \nu_p(A_2) \geqslant 0,\ \nu_p(A_3) \geqslant 0.$$

Поэтому далее мы считаем, что $p \in \Xi_1$.

Отметим некоторые простые факты, которые мы будем использовать.

1) Для любого $p \in \Xi_1$ верно $p \leqslant b_1 n = c_1 n$. Действительно, так как $\mu(x, y) = 0$ при $y \in [0; 1/b_1)$ и $x = (1 + b_1 y)/2$, то для любого $y \in \Omega_1$ выполняется $1/b_1 \leqslant y$. Значит, что для любого $p \in \Xi_1$ верно

$$\frac{n}{p} \geqslant \left\{\frac{n}{p}\right\} \geqslant \frac{1}{b_1},$$

то есть $p \leqslant b_1 n = c_1 n$.
Таким образом, учитывая (3.13), (3.14), (3.22) и (3.23), получаем равенства

$$\nu_p(d_{b_1 n+1}) = 1, \nu_p(d_C \Delta_1') = 1, \nu_p(\Delta_1 \Delta_2) = w_p. \tag{3.24}$$

2) Для знаменателя несократимой дроби

$$\frac{C(k)}{D(k)} = \sum_{j \in \mathbb{J}_k} \frac{1}{j-k}$$

при $k \in \mathbb{Z}$, $k > b_2 n + 1$, выполняется неравенство

$$\nu_p(D(k)) \leqslant \max_{j \in \mathbb{J}_k} \{\nu_p(j-k)\}. \tag{3.25}$$

Также отметим, что при $k \in \mathbb{Z}$, $b_2 n + 1 < k \leqslant b_1 n + 1$, верно

$$\nu_p(D(k)) \leqslant 1, \tag{3.26}$$

так как $|j - k| < c_1 n + 1 < p^2$.

3) Для знаменателя несократимой дроби

$$\frac{E(k)}{F(k)} = \sum_{i \neq j \in \mathbb{J}} \frac{1}{i-k} \cdot \frac{1}{j-k}$$

при $k \in \mathbb{Z}$, $k > b_1 n + 1$, выполняется неравенство

$$\nu_p(F(k)) \leqslant \max_{i \neq j \in \mathbb{J}} \{\nu_p((i-k)(j-k))\}. \qquad (3.27)$$

Теперь перейдем к доказательству.

1. $b_1 n + 1 < k$.

Для A_1 ввиду (3.24) и леммы 16 получаем

$$\nu_p(A_1) = -\nu_p(\Delta_1 \Delta_2) + \nu_p(A(-k)\Lambda) \geqslant -w_p + w_p = 0.$$

Для A_2 имеем

$$A'(-k) = A(-k) \left(\sum_{j \in \mathbb{J}} \frac{1}{j-k} \right) = A(-k) \left(\sum_{j \in \mathbb{J}_k} \frac{1}{j-k} \right) = A(-k) \frac{C(k)}{D(k)}.$$

Отсюда ввиду (3.24), леммы 16 и (3.25) получаем

$$\nu_p(A_2) \geqslant \nu_p(d_{c_1 n+1}) - \nu_p(\Delta_1 \Delta_2) + \nu_p(A(-k)\Lambda) - \nu_p(D(k)) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - w_p + (\max_{j \in \mathbb{J}_k} \{\nu_p(j-k)\} + w_p - 1) - \max_{j \in \mathbb{J}_k} \{\nu_p(j-k)\} = 0.$$

Для A_3 имеем

$$A''(-k) = A(-k) \left(\sum_{i \neq j \in \mathbb{J}} \frac{1}{i-k} \cdot \frac{1}{j-k} \right) = A(-k) \frac{E(k)}{F(k)}.$$

Отсюда ввиду (3.24), леммы 16 и (3.27) получаем

$$\nu_p(A_3) \geqslant \nu_p(d_C \Delta_1') + \nu_p(d_{c_1 n+1}) - \nu_p(\Delta_1 \Delta_2) + \nu_p(A(-k)\Lambda) - \nu_p(F(k)) \geqslant$$
$$\geqslant 1+1-w_p+(\max_{i \neq j \in \mathbb{J}} \{\nu_p((j-k)(i-k))\}+w_p-2)-\max_{i \neq j \in \mathbb{J}} \{\nu_p((j-k)(i-k))\} = 0.$$

2. $b_2 n + 1 < k \leqslant b_1 n + 1$.

В этом случае $A_1 = 0$.

Для A_2 ввиду (3.24) и леммы 16 получаем

$$\nu_p(A_2) = \nu_p(d_{c_1 n+1}) - \nu_p(\Delta_1 \Delta_2) + \nu_p(A'(-k)\Lambda) \geqslant 1 - w_p + (w_p - 1) = 0.$$

Для A_3 имеем

$$A''(-k) = A'(-k) \left(\sum_{j \in \mathbb{J}_k} \frac{1}{j-k} \right) = A'(-k) \frac{C(k)}{D(k)}.$$

Отсюда ввиду (3.24), леммы 16 и (3.26) получаем

$$\nu_p(A_3) \geqslant \nu_p(d_C\Delta_1') + \nu_p(d_{c_1n+1}) - \nu_p(\Delta_1\Delta_2) + \nu_p(A'(-k)\Lambda) - \nu_p(D(k)) \geqslant$$
$$\geqslant 1 + 1 - w_p + (w_p - 1) - 1 = 0.$$

3. $b_3n + 1 < k \leqslant b_2n + 1$.
В этом случае $A_1 = A_2 = 0$.
Для A_3 ввиду (3.24) и леммы 16 получаем

$$\nu_p(A_3) = \nu_p(d_{C_1}\Delta_1') + \nu_p(d_{c_1n+1}) - \nu_p(\Delta_1\Delta_2) + \nu_p(A''(-k)\Lambda) \geqslant 1+1-w_p+(w_p-2) = 0.$$

4. $a_3n + 1 \leqslant k \leqslant b_3n + 1$.
В этом случае $A_1 = A_2 = A_3 = 0$.

5. $k < a_3n + 1$.
Требуемое выполняется ввиду свойства (3.2) многочлена $A(x)$.

Лемма 17 доказана. □

3.4 Арифметические свойства $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$

Будем в $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ в качестве параметра t подставлять следующие значения:

$$\lambda_{k,1} = \frac{k+1-\sqrt{2k+1}}{k}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, k > 0, \tag{3.28}$$

$$\lambda_{k,2} = \frac{k-1-i\sqrt{2k-1}}{k} = e^{-i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2k-1}}{k-1}}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, k > 0. \tag{3.29}$$

Введем обозначения

$$R_{k,n,1} = \begin{cases} m^{-\frac{c_1n+2}{2}}, & \text{если } k = 2m, \\ 2^{\frac{N+2}{2}}k^{-\frac{c_1n+2}{2}}, & \text{если } k = 2m-1, \end{cases}$$

$$R_{k,n,2} = \begin{cases} m^{-\frac{c_2n+2}{2}}, & \text{если } k = 2m, \\ 2^{\frac{N+2}{2}}k^{-\frac{c_2n+2}{2}}, & \text{если } k = 2m-1, \end{cases}$$

$$R_{k,n,3} = \begin{cases} m^{-\frac{c_3n+2}{2}}, & \text{если } k = 2m, \\ 2^{\frac{N+2}{2}}k^{-\frac{c_3n+2}{2}}, & \text{если } k = 2m-1. \end{cases} \tag{3.30}$$

Лемма 18. *Для любого $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ справедливы утверждения.*

1. $$Y_{k,1,1} = R_{k,n,1} D_1 U_1(\lambda_{k,1}) \Lambda \sqrt{2k+1} \in \mathbb{Z}, Y_{k,1,2} = R_{k,n,2} D_2 U_2(\lambda_{k,1}) \Lambda \in \mathbb{Z},$$ $$Y_{k,1,3} = R_{k,n,3} D_3 U_3(\lambda_{k,1}) \Lambda \sqrt{2k+1} \in \mathbb{Z};$$

2. $$Y_{k,2,1} = R_{k,n,1} D_1 U_1(\lambda_{k,2}) \Lambda i \sqrt{2k-1} \in \mathbb{Z}, Y_{k,2,2} = R_{k,n,2} D_2 U_2(\lambda_{k,2}) \Lambda \in \mathbb{Z},$$ $$Y_{k,2,3} = R_{k,n,3} D_3 U_3(\lambda_{k,2}) \Lambda i \sqrt{2k-1} \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство леммы 18. Отметим некоторые простые факты, которые мы будем использовать.
1) Для $\lambda_{k,1}$ выполняется

$$\lambda_{k,1} + \frac{1}{\lambda_{k,1}} = \frac{2k+2}{k} \text{ и } \lambda_{k,1} - \frac{1}{\lambda_{k,1}} = -\frac{2\sqrt{2k+1}}{k}.$$

Отсюда в соответствии со следствием 5 получаем

$$U(\lambda_{k,1})\sqrt{2k+1}, V(\lambda_{k,1}), W(\lambda_{k,1})\sqrt{2k+1} \in \mathbb{Q}. \tag{3.31}$$

Обозначим через

$$p_{1,k,1} = \frac{\lambda_{k,1}}{\lambda_{k,1}-1} = \frac{1-\sqrt{2k+1}}{2} \text{ и } p_{2,k,1} = \frac{1}{1-\lambda_{k,1}} = \frac{1+\sqrt{2k+1}}{2}$$

корни уравнения $x^2 - x - \frac{k}{2} = 0$.
2) Для $\lambda_{k,2}$ выполняется

$$\lambda_{k,2} + \frac{1}{\lambda_{k,2}} = \frac{2k-2}{k} \text{ и } \lambda_{k,2} - \frac{1}{\lambda_{k,2}} = -\frac{2i\sqrt{2k-1}}{k}.$$

Отсюда в соответствии со следствием 5 получаем

$$U(\lambda_{k,2})i\sqrt{2k-1}, V(\lambda_{k,2}), W(\lambda_{k,2})i\sqrt{2k-1} \in \mathbb{Q}. \tag{3.32}$$

Обозначим через

$$\frac{\lambda_{k,2}}{\lambda_{k,2}-1} = \frac{1+i\sqrt{2k-1}}{2} = p_{1,k,2} \text{ и } \frac{1}{1-\lambda_{k,2}} = \frac{1-i\sqrt{2k-1}}{2} = p_{2,k,2}$$

корни уравнения $x^2 - x + \frac{k}{2} = 0$.

Через s любое число из множества $\{1, 2\}$.

Для доказательства леммы 18 достаточно показать, что $Y_{k,s,l}^2 \in \mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ — кольцо целых алгебраических чисел. Действительно, если это так, то $Y_{k,s,l}$ — целое алгебраическое. Из (3.31), (3.32) получаем, что $Y_{k,s,l} \in \mathbb{Q}$. Следовательно, $Y_{k,s,l} \in \mathbb{Z}$.

Из леммы 17 следует (здесь мы используем определения (3.7) многочленов $A_l(x)$ и соотношения для $e_j^{(l)}$ из предложения 7)

$$D_l A_l^{(l-1)}(k)\Lambda \in \mathbb{Z},\ \text{где}\ k \in \mathbb{Z},\ \text{то есть}\ D_l e_j^{(l)}\Lambda \in \mathbb{Z}. \tag{3.33}$$

Из предложения 7 и леммы 15 мы получаем

$$(U_2(\lambda_{k,s}))^2 = U_2(\lambda_{k,s}) U_2\left(\frac{1}{\lambda_{k,s}}\right) =$$
$$= (p_{1,k,s}p_{2,k,s})^{c_2n+2} \sum_{j=c_2n+1}^{N-1} e_j^{(2)} p_{1,k,s}^{j-c_2n-1} \sum_{j=c_2n+1}^{N-1} e_j^{(2)} p_{2,k,s}^{j-c_2n-1} =$$
$$= (q_{k,s})^{c_2n+2} \sum_{j=c_2n+1}^{N-1} e_j^{(2)} p_{1,k,s}^{j-c_2n-1} \sum_{j=c_2n+1}^{N-1} e_j^{(2)} p_{2,k,s}^{j-c_2n-1}, \tag{3.34}$$

здесь

$$q_{k,s} = p_{1,k,s}p_{2,k,s} = \begin{cases} -\dfrac{k}{2},\ \text{если}\ s = 1, \\ \dfrac{k}{2},\ \text{если}\ s = 2. \end{cases}$$

Аналогичным образом выводятся равенства

$$(U_1(\lambda_{k,s}))^2 = -(q_{k,s})^{c_1n+2} \sum_{j=c_1n+1}^{N} e_j^{(1)} p_{1,k,s}^{j-c_1n-1} \sum_{j=c_1n+1}^{N} e_j^{(1)} p_{2,k,s}^{j-c_1n-1}, \tag{3.35}$$

$$(U_3(\lambda_{k,s}))^2 = -(q_{k,s})^{c_3n+2} \sum_{j=c_3n+1}^{N-2} e_j^{(3)} p_{1,k,s}^{j-c_3n-1} \sum_{j=c_3n+1}^{N-2} e_j^{(3)} p_{2,k,s}^{j-c_3n-1}. \tag{3.36}$$

Остается разобрать несколько случаев.

1. $k = 2m$.

При любом $L \in \mathbb{Z}$, $L \geqslant 0$, выполняется $p_{i,k,s}^L \in \mathbb{K}$, где $i = 1, 2$, так как $p_{i,k,s} \in \mathbb{K}$. Тогда из (3.33) и (3.34)–(3.36) получаем

$$Y_{k,s,l}^2 = \left(\sum_{j=c_ln+1}^{N-l+1} \left(D_l e_j^{(l)}\Lambda\right) p_{1,k,s}^{j-c_ln-1}\right) \left(\sum_{j=c_ln+1}^{N-l+1} \left(D_l e_j^{(l)}\Lambda\right) p_{2,k,s}^{j-c_ln-1}\right) y_{l,k,s} \in \mathbb{K},$$

где

$$y_{1,k,s} = y_{3,k,s} = \begin{cases} -(2k+1), \text{ если } s = 1, \\ \ \ (2k-1), \text{ если } s = 2, \end{cases} \quad y_{2,k,s} = 1.$$

2. $k = 2m - 1$.

При любом $L \in \mathbb{Z}$, $L \geqslant 0$, выполняется $2^{\left[\frac{L+1}{2}\right]} p_{i,k,s}^{L} \in \mathbb{K}$, где $i = 1, 2$, так как

$$(p_{i,k,1})^{2L} = \left(\frac{k+1 \mp \sqrt{2k+1}}{2}\right)^{L} \text{ и } (p_{i,k,1})^{2L+1} = \frac{1 \mp \sqrt{2k+1}}{2}(p_{i,k,1})^{2L}$$

или

$$(p_{i,k,2})^{2L} = \left(\frac{-k+1 \pm i\sqrt{2k-1}}{2}\right)^{L} \text{ и } (p_{i,k,2})^{2L+1} = \frac{1 \pm i\sqrt{2k-1}}{2}(p_{i,k,2})^{2L}.$$

Тогда из (3.33) и (3.34)–(3.36) получаем

$$Y_{k,s,l}^2 = \left(\sum_{j=c_l n+1}^{N-l+1} \left(D_l e_j^{(l)} \Lambda\right) 2^{\frac{N-c_l n}{2}} p_{1,k,s}^{j-c_l n-1}\right) \times$$
$$\times \left(\sum_{j=c_l n+1}^{N-l+1} \left(D_l e_j^{(l)} \Lambda\right) 2^{\frac{N-c_l n}{2}} p_{2,k,s}^{j-c_l n-1}\right) y_{l,k,s} \in \mathbb{K}.$$

Лемма 18 доказана. □

3.5 Асимптотика $U_1(\psi)$

Будем подставлять в качестве параметра t в $U_1(t)$ число $\psi \in (0;1)$.

Определим функцию

$$h(z) = \ln\left(\frac{(z+b_1)^{b_1}(z+b_2)^{b_2}(z+b_3)^{b_3}(z+b_4)^{b_4}}{(-z-a_1)^{a_1}(-z-a_2)^{a_2}(-z-a_3)^{a_3}(-z-a_4)^{a_4} c_1^{c_1} c_2^{c_2} c_3^{c_3} c_4^{c_4}}\right)$$

и уравнение

$$\frac{(z+b_1)(z+b_2)(z+b_3)(z+b_4)}{(-z-a_1)(-z-a_2)(-z-a_3)(-z-a_4)} = \psi. \tag{3.37}$$

В предложении 8 определяется функция $M(\psi)$.

Предложение 8. *Если $z_{1,\psi} < -b_1$ — корень уравнения (3.37), то имеет место равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|U_1(\psi)| = \operatorname{Re} h(z_{1,\psi}) - \frac{b_1}{2}\ln\psi = M(\psi).$$

Доказательство предложения 8. Так как $U_1(t)$ отличается от $V_1(t)$ множителем $t^{-\frac{b_1n+2}{2}}$ (см. определение $V_1(t)$ в формулировке предложения 7), то достаточно доказать

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|V_1(\psi)| = \operatorname{Re} h(z_{1,\psi}).$$

Из равенства (1.27) получаем

$$V_1(\psi) = -\sum_{k=b_1n+2}^{+\infty} A(-k)\psi^k = -\sum_{k=b_1n+2}^{+\infty}\frac{B(k)}{k^2}, \text{ где } B(k) = A(-k)\psi^k k^2.$$

Пользуясь формулой (3.15) для $A(-k)$, имеем

$$\delta(k) = \frac{B(k+1)}{B(k)} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \frac{\psi(k-a_1n)(k-a_2n)(k-a_3n)(k-a_4n)}{(k-1-b_1n)(k-1-b_2n)(k-1-b_3n)(k-1-b_4n)}.$$

Рассмотрим функцию

$$s(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(x-(b_1+1))(x-(b_2+1))(x-(b_3+1))}$$

Тогда $s(x)\to 1$ при $x\to+\infty$. Значит, существует целое $x_0 > b_1+1$, что для любого $x \geqslant x_0$ верно

$$s(x) < \psi^{-1},$$

так как $\psi^{-1} > 1$. Следовательно, $\delta(k) < 1$ при $k \geqslant nx_0$, то есть последовательность $B(k)$ убывает при $k \geqslant nx_0$. Значит,

$$M = \max_{b_1n+2\leqslant k}|B(k)| = \max_{b_1n+2\leqslant k\leqslant x_0n}|B(k)|.$$

Оценим $\ln M$ сверху. Считаем, что $b_1n < k \leqslant x_0n$. Используя формулу (1.58) Стирлинга и обозначение $\varsigma = k/n$, получаем

$$\ln|B(k)| = nf(\varsigma) + O(\ln n), \text{ где}$$

$$f(\varsigma) = \ln\frac{(\varsigma-a_1)^{\varsigma-a_1}(\varsigma-a_2)^{\varsigma-a_2}(\varsigma-a_3)^{\varsigma-a_3}(\varsigma-a_4)^{\varsigma-a_4}\psi^{\varsigma}}{(\varsigma-b_1)^{\varsigma-b_1}(\varsigma-b_2)^{\varsigma-b_2}(\varsigma-b_3)^{\varsigma-b_3}(\varsigma-b_4)^{\varsigma-b_4}c_1^{c_1}c_2^{c_2}c_3^{c_3}c_4^{c_4}}. \tag{3.38}$$

Рассмотрим уравнение $f'(z) = 0$, то есть

$$\frac{\psi(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}{(z-b_1)(z-b_2)(z-b_3)(z-b_4)} = 1. \tag{3.39}$$

Несложно понять, что у уравнения (3.39) есть только один корень $z'_{1,\psi}$, больший b_1. Очевидно, что функция $f(\varsigma)$ принимает наибольшее значение в точке $z'_{1,\psi}$ при $\varsigma \geqslant b_1$. Отсюда получаем, что выполняется неравенство

$$\ln M \leqslant nf(z'_{1,\psi}) + O(\ln n).$$

Оценим $\ln M$ снизу. Для этого рассмотрим число $r = [z'_{1,\psi}n]$. Тогда

$$\left| z'_{1,\psi} - \frac{r}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Откуда

$$f\left(\frac{r}{n}\right) = f(z'_{1,\psi}) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Значит,

$$\ln |B(r)| = nf(z'_{1,\psi}) + O(\ln n).$$

То есть

$$\ln M = nf(z'_{1,\psi}) + O(\ln n).$$

Таким образом, ввиду оценок

$$M\frac{1}{(x_0 n)^2} < |V_1(\psi)| < M \sum_{k=b_1 n+2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < M\frac{\pi^2}{6}$$

получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |V_1(\psi)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln M = f(z'_{1,\psi}).$$

Пользуясь (3.39), несложно убедиться, что $-z'_{1,\psi}$ является корнем (3.37) и $-z'_{1,\psi} < -b_1$. Значит, $-z'_{1,\psi} = z_{1,\psi}$. Следовательно, учитывая (3.38) и (3.39), получаем

$$f(z'_{1,\psi}) = \operatorname{Re} h(z_{1,\psi}).$$

Предложение 8 доказано. □

3.6 Асимптотические свойства $J_3(\psi)$

Будем подставлять в качестве параметра t в $J_3(t)$ число $\psi \in (0; 1)$.

В предложении 9 определяется функция $m(\psi)$.

Предложение 9. *Если $z_{2,\psi} = d_3 + i\mu$ — такой корень уравнения (3.37), что $-b_4 < d_3 < -a_4$ и $\mu > 0$, тогда справедлива оценка*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}|J_3(\psi)| \leqslant \operatorname{Re} h(z_{2,\psi}) - \frac{b_1}{2}\ln\psi = m(\psi).$$

Доказательство предложения 9. Так как $J_3(t)$ отличается от $I_3(t)$ множителем $t^{-\frac{b_1 n+2}{2}}$ (см. (3.3)), то достаточно доказать, что

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln|I_3(\psi)| \leqslant \operatorname{Re} h(z_{2,\psi}).$$

Выберем в качестве контура L_3 вертикальную прямую

$$L_3 = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = nd_3 + iy, -\infty < y < +\infty\}.$$

Используя свойства (1.61) гамма-функции, получаем

$$\Psi_3(\zeta) = \left(\frac{\sin\pi\zeta}{\pi}\right)\frac{\Gamma(\zeta+b_1n+2)\Gamma(-\zeta-a_1n)}{\Gamma(c_1n+2)}\frac{\Gamma(\zeta+b_2n+2)\Gamma(-\zeta-a_2n)}{\Gamma(c_2n+2)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\zeta+b_3n+2)\Gamma(-\zeta-a_3n)}{\Gamma(c_3n+2)}\frac{\Gamma(\zeta+b_4n+2)\Gamma(-\zeta-a_4n)}{\Gamma(c_4n+2)}\frac{e^{-\zeta\ln\psi-\zeta\pi i}}{(-1)^{(a_1+a_2+a_3+a_4)n}}.$$

Определим два луча

$$L^+ = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = nd_3 + iy, 0 \leqslant y < +\infty\},$$
$$L^- = \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = nd_3 + iy, -\infty < y \leqslant 0\}.$$

Определим интегралы $I_3^+(\psi)$, $I_3^-(\psi)$ с помощью равенства

$$I_3(\psi) = \int_{L_3^+}\Psi_3(\zeta)d\,\zeta + \int_{L_3^-}\Psi_3(\zeta)d\,\zeta = I_3^+(\psi) + I_3^-(\psi).$$

Оценка $I_3^+(\psi)$.

Введем обозначение $\zeta = zn$. Отметим, что в последующих выражениях константа в $O\left(n^{-1}\right)$ не зависят от z. На основании формулы (1.58) Стирлинга и равенств

$$\operatorname{Re}^{-1}(\zeta+b_in+2) = O\left(n^{-1}\right) > 0,\ \operatorname{Re}^{-1}(-\zeta-a_in) = O\left(n^{-1}\right) > 0,\ \text{где } i \in \{1,2,3,4\},$$

при $\zeta \in L_3$, получаем

$$\Psi_3(\zeta) = \varphi_{3,+}(z)e^{nf_{3,+}(z)},$$

где

$$
\begin{aligned}
f_{3,+}(z) = (z+b_1)\ln(z+b_1) - (z+a_1)\ln(-z-a_1)+ \\
+(z+b_2)\ln(z+b_2) - (z+a_2)\ln(-z-a_2)+ \\
+(z+b_3)\ln(z+b_3) - (z+a_3)\ln(-z-a_3)+ \\
+(z+b_4)\ln(z+b_4) - (z+a_4)\ln(-z-a_4)- \\
-\ln c_1^{c_1}c_2^{c_2}c_3^{c_3}c_4^{c_4} - z\ln\psi - 2z\pi i
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\varphi_{3,+}(z) = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^4 \frac{(z+b_1)^3(z+b_2)^3(z+b_3)^3(z+b_4)^3}{(-z-a_1)(-z-a_2)(-z-a_3)(-z-a_4)c_1^3c_2^3c_3^3c_4^3}}\times \\
\times(-1)^{(a_1+a_2+a_3+a_4)n}\frac{e^{2\pi izn}-1}{2i\pi}\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Совершим замену $\zeta = nz = n(d_3+iy)$, тогда

$$
I_3^+(\psi) = \frac{n}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} \varphi_{3,+}(d_3+iy)e^{nf_{3,+}(d_3+iy)}\,dy.
$$

Пусть $q_{3,+}(y) = \operatorname{Re} f_{3,+}(z)$, тогда

$$
\begin{aligned}
q'_{3,+}(y) = -\operatorname{Im}\left[\frac{\partial f_{3,+}}{\partial x}\right] = -\operatorname{Im}\left[\frac{\partial f_{3,+}}{\partial z}\right] = \\
= -\operatorname{Im}[\ln(z+b_1)+\ln(z+b_2)+\ln(z+b_3)+\ln(z+b_4)- \\
-\ln(-z-a_1)-\ln(-z-a_2)-\ln(-z-a_3)-\ln(-z-a_4)- \\
-\ln\psi - 2\pi i] =
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

$$
\begin{aligned}
= -\arg(z+b_1)-\arg(z+b_2)-\arg(z+b_3)-\arg(z+b_4)+ \\
+\arg(-z-a_1)+\arg(-z-a_2)+\arg(-z-a_3)+\arg(-z-a_4)+2\pi.
\end{aligned}
$$

Откуда заключаем, что $q'_{3,+}(y)$ — убывающая функция, поскольку функции $-\arg(b+di)$ и $\arg(b-di)$ при фиксированном $b>0$ убывают, когда d меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

Так как $z_{2,\psi} = d_3 + i\mu$ — корень уравнения (3.37), то

$$
e^{\frac{\partial f_{3,+}(z_{2,\psi})}{\partial x}} = \frac{(z_{2,\psi}+b_1)(z_{2,\psi}+b_2)(z_{2,\psi}+b_3)(z_{2,\psi}+b_4)}{(-z_{2,\psi}-a_1)(-z_{2,\psi}-a_2)(-z_{2,\psi}-a_3)(-z_{2,\psi}-a_4)\psi} = 1.
$$

Значит,
$$\frac{\partial f_{3,+}(z_{2,\psi})}{\partial z} = 2\pi k i.$$
Пользуясь (3.42), имеем
$$-2\pi < \arg\frac{\partial f_{3,+}(z_{2,\psi})}{\partial x} < 8\frac{\pi}{2} - 2\pi = 2\pi$$
Следовательно,
$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial f_{3,+}(z_{2,\psi})}{\partial z} = &\ln(z_{2,\psi}+b_1) + \ln(z_{2,\psi}+b_2)+\\ &+\ln(z_{2,\psi}+b_3) + \ln(z_{2,\psi}+b_4)-\\ &-\ln(-z_{2,\psi}-a_1) - \ln(-z_{2,\psi}-a_2)-\\ &-\ln(-z_{2,\psi}-a_3) - \ln(-z_{2,\psi}-a_4) - \ln\psi - 2\pi i.\end{aligned} \tag{3.43}$$
То есть $q'_{3,+}(\mu) = 0$. Значит, функция $q_{3,+}(y)$ принимает наибольшее значение в точке μ при $y \geqslant 0$.

Учитывая (3.40) и (3.43), получаем
$$q_{3,+}(\mu) = \operatorname{Re} f_{3,+}(z_{2,\psi}) = \operatorname{Re} h(z_{2,\psi}).$$

Оценим интеграл $I_3^+(\psi)$. Через C_i будем обозначать некоторые положительные константы.

При $\zeta \in L_3^+$ и достаточно большом n выполняется неравенство
$$|\varphi_{3,+}(z)| \leqslant C_1 y^4 n^{-2}.$$

Найдем такое число $\varepsilon_1 > 0$, что $q'_{3,+}(\mu+\varepsilon_1) < -1$. Оно существует, так как $q'_{3,+}(y) \to -2\pi$ при $y \to +\infty$. Определим интегралы $I_3^1(\psi)$, $I_3^2(\psi)$ с помощью равенства
$$\begin{aligned}I_3^+(\psi) = \frac{n}{2\pi}\int\limits_0^{\mu+\varepsilon_1} \varphi_{3,+}(d_3+iy)e^{nf_{3,+}(d_3+iy)}\,dy+\\ +\frac{n}{2\pi}\int\limits_{\mu+\varepsilon_1}^{+\infty} \varphi_{3,+}(d_3+iy)e^{nf_{3,+}(d_3+iy)}\,dy = I_3^1(\psi) + I_3^2(\psi).\end{aligned}$$

Оценим $I_3^1(\psi)$, $I_3^2(\psi)$.

a) Оценка $I_3^1(\psi)$. Тогда при достаточно большом n получаем

$$|I_3^1(\psi)| = \left| \frac{n}{2\pi} \int\limits_0^{\mu+\varepsilon_1} \varphi_{3,+}(d_3+iy)e^{nf_{3,+}(d_3+iy)}\,dy \right| \leqslant e^{n\operatorname{Re}h(z_{2,\psi})}.$$

b) Оценка $I_3^2(\psi)$. Так как $q'_{3,+}(y)$ — убывающая функция и $q'_{3,+}(\mu+\varepsilon_1) < -1$, то при $y \geqslant \mu+\varepsilon_1$ верно неравенство

$$q_{3,+}(y) - q_{3,+}(\mu+\varepsilon_1) = q'_{3,+}(\theta)(y-(\mu+\varepsilon_1)) < -(y-(\mu+\varepsilon_1))$$

для некоторого числа $\theta = \theta(y)$, $\mu+\varepsilon_1 \leqslant \theta \leqslant y$. При достаточно большом n

$$|I_3^2(\psi)| = \left| \frac{n}{2\pi} \int\limits_{\mu+\varepsilon_1}^{+\infty} \varphi_{3,+}(d_3+iy)e^{nf_{3,+}(d_3+iy)}dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{nq_{3,+}(\mu+\varepsilon_1)} \int\limits_{\mu+\varepsilon_1}^{+\infty} y^4 e^{n(q_{3,+}(y)-q_{3,+}(\mu+\varepsilon_1))}dy \leqslant$$

$$\leqslant e^{nq_{3,+}(\mu+\varepsilon_1)} \int\limits_{\mu+\varepsilon_1}^{+\infty} y^4 e^{-(y-(\mu+\varepsilon_1))n}dy < C_2 e^{n\operatorname{Re}h(z_{2,\psi})},$$

так как $q_{3,+}(\mu+\varepsilon_1) < q_{3,+}(\mu) = \operatorname{Re}h(z_{2,\psi})$.

Таким образом,

$$|I_3^+(\psi)| \leqslant |I_3^1(\psi)| + |I_3^2(\psi)| \leqslant C_3 e^{n\operatorname{Re}h(z_{2,\psi})}.$$

Оценка $I_3^-(\psi)$.

Введем обозначение $\zeta = zn$. Пользуясь формулой Стирлинга (1.58), получаем

$$\Psi_3(\zeta) = \varphi_{3,-}(z)e^{nf_{3,-}(z)},$$

где (см. (3.40) и (3.41))

$$f_{3,-}(z) = f_{3,+}(z) + 2i\pi z$$

и

$$\varphi_{3,-}(z) = \varphi_{3,+}(z)e^{-2i\pi z}.$$

Совершим замену $\zeta = nz = n(d_3 + iy)$, тогда

$$I_3^-(\psi) = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_{3,-}(d_3 + iy) e^{n f_{3,-}(d_3+iy)} d\, y.$$

Пусть $q_{3,-}(y) = \operatorname{Re} f_{3,-}(z)$, тогда

$$q'_{3,-}(y) = -\operatorname{Im}\left[\frac{\partial f_{3,-}}{\partial x}\right] = -\operatorname{Im}\left[\frac{\partial f_{3,-}}{\partial z}\right] =$$
$$= -\arg(z+b_1) - \arg(z+b_2) - \arg(z+b_3) - \arg(z+b_4) +$$
$$+ \arg(-z-a_1) + \arg(-z-a_2) + \arg(-z-a_3) + \arg(-z-a_4).$$

Откуда заключаем, что $q'_{3,-}(y)$ — убывающая функция. Так как $q'_{3,-}(0) = 0$, то функция $q_{3,-}(y)$ принимает наибольшее значение в точке 0 при $y \leqslant 0$.

Оценим $I_3^-(\psi)$.

При $\zeta \in L_3^-$ и достаточно большом n выполняется неравенство

$$|\varphi_{3,-}(z)| \leqslant C_4 y^4 n^{-2}.$$

Найдем такое число $\varepsilon_2 > 0$, что $q'_{3,-}(-\varepsilon_2) > 1$. Оно существует, так как $q'_{3,-}(y) \to 4\pi$ при $y \to -\infty$. Определим интегралы $I_3^3(\psi)$, $I_3^4(\psi)$ с помощью равенства

$$I_3^-(\psi) = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon_2} \varphi_{3,-}(d_3 + iy) e^{n f_{3,-}(d_3+iy)}\, dy +$$
$$+ \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\varepsilon_2}^{0} \varphi_{3,-}(d_3 + iy) e^{n f_{3,-}(d_3+iy)}\, dy = I_3^3(\psi) + I_3^4(\psi).$$

Оценим $I_3^3(\psi)$, $I_3^4(\psi)$.

а) Оценка $I_3^3(\psi)$. Так как $q'_{3,-}(y)$ — убывающая функция и $q'_{3,-}(-\varepsilon_2) > 1$, то при $y \leqslant -\varepsilon_2$ верно неравенство

$$q_{3,-}(y) - q_{3,-}(-\varepsilon_2) = q'_{3,-}(\theta)(y + \varepsilon_2) < y + \varepsilon_2,$$

для некоторого числа $\theta = \theta(y)$, $y \leqslant \theta \leqslant -\varepsilon_2$. При достаточно большом n

$$|I_3^3(\psi)| = \left| \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon_2} \varphi_{3,-}(d_3 + iy) e^{n f_{3,-}(d_3+iy)}\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{n q_{3,-}(-\varepsilon_2)} \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon_2} y^4 e^{n(q_{3,-}(y) - q_{3,-}(-\varepsilon_2))}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant e^{n q_{3,-}(-\varepsilon_2)} \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon_2} y^4 e^{n(y+\varepsilon_2)} dy \leqslant C_5 e^{n \operatorname{Re} h(z_{2,\psi})}.$$

Поскольку

$$q_{3,-}(-\varepsilon_2) < q_{3,-}(0) = \operatorname{Re} f_{3,-}(d_3) = \operatorname{Re} f_{3,+}(d_3) = q_{3,+}(0) < q_{3,+}(\mu) = \operatorname{Re} h(z_{2,\psi}).$$

b) Оценка $I_3^4(\psi)$. При достаточно большом n

$$|I_3^4(\psi)| = \left| \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\varepsilon_2}^{0} \varphi_{3,-}(d_3 + iy) e^{n f_{3,-}(d_3+iy)}\, dy \right| \leqslant e^{n q_{3,-}(0)} < e^{n \operatorname{Re} h(z_{2,\psi})}.$$

Поскольку

$$q_{3,-}(0) = \operatorname{Re} f_{3,-}(d_3) = \operatorname{Re} f_{3,+}(d_3) = q_{3,+}(0) < q_{3,+}(\mu) = \operatorname{Re} h(z_{2,\psi}).$$

Таким образом,

$$|I_3^-(\psi)| \leqslant |I_3^3(\psi)| + |I_3^4(\psi)| \leqslant C_6 e^{n \operatorname{Re} h(z_{2,\psi})}.$$

Отсюда

$$|I_3(\psi)| \leqslant |I_3^+(\psi)| + |I_3^-(\psi)| \leqslant C_7 e^{n \operatorname{Re} h(z_{2,\psi})}.$$

То есть

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} |I_3(\psi)| \leqslant \operatorname{Re} h(z_{2,\psi}).$$

Предложения 9 доказано. □

3.7 Оценки квадратичных показателей иррациональности α_k

Получены оценки сверху квадратичных показателей иррациональности чисел

$$\alpha_k = \sqrt{2k+1} \ln \frac{k + 1 - \sqrt{2k+1}}{k}, \text{ где } k = 2, 4, 6, 8, 10.$$

Теорема 7. *Справедливы оценки.*

k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
2	*18,57994...*	*6*	*11,20381...*	*10*	*9,86485...*
4	*12,84161...*	*8*	*10,37857...*		

Доказательство. Доказательство теоремы 7 основано на лемме 12. Рассмотрим последовательности (см. определение $\lambda_{k,1}$ в (3.28))

$$l_n = R_{k,n,3}D_3\left(-\frac{\operatorname{Im}(J_3(\lambda_{k,1}))}{\pi}\right)\Lambda(2k+1) =$$
$$= R_{k,n,3}D_3U_1(\lambda_{k,1})\sqrt{2k+1}\Lambda\cdot\alpha_k - R_{k,n,3}D_3U_2(\lambda_{k,1})(2k+1) = q_n\alpha_k + p_n,$$

$$m_n = R_{k,n,3}D_3\left(2\operatorname{Re}(J_3(\lambda_{k,1})) - 2\frac{\operatorname{Im}(J_3(\lambda_{k,1}))}{\pi}\ln\lambda_{k,1}\right)\Lambda(2k+1)^{3/2} =$$
$$= R_{k,n,3}D_3U_1(\lambda_{k,1})\Lambda\sqrt{2k+1}\cdot\alpha_k^2 - R_{k,n,3}D_3U_3(\lambda_{k,1})\Lambda(2k+1)^{3/2} = q_n\alpha_k^2 + r_n.$$

Из леммы 18 следует, что q_n, p_n, $r_n \in \mathbb{Z}$.
Из предложений 8, 9 при $\psi = \lambda_{k,1}$ получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|q_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|R_{k,n,3}D_3U_1(\lambda_{k,1})\Lambda\sqrt{2k+1}| = N_{k,3} + M_3 + M(\lambda_{k,1}),$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|l_n| =$$
$$= \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left|R_{k,n,3}D_3\left(-\frac{\operatorname{Im}(J_3(\lambda_{k,1}))}{\pi}\right)\Lambda(2k+1)\right| \leqslant$$
$$\leqslant N_{k,3} + M_3 + m(\lambda_{k,1}),$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|m_n| =$$
$$= \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left|R_{k,n,3}D_3\left(2\operatorname{Re}(J_3(\lambda_{k,1})) - 2\frac{\operatorname{Im}(J_3(\lambda_{k,1}))}{\pi}\ln\lambda_{k,1}\right)\Lambda(2k+1)^{3/2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant N_{k,3} + M_3 + m(\lambda_{k,1}).$$

Здесь (см. (3.30), (3.23))

$$N_{k,3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(R_{k,n,3}) = \begin{cases} -\dfrac{c_3}{2}\ln m, & \text{если } k = 2m, \\ -\dfrac{c_3}{2}\ln k + \dfrac{c_1+c_2+c_3+c_4}{2}\ln 2, & \text{если } k = 2m-1, \end{cases}$$

$$M_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln D_3.$$

Если $N_{k,3} + M_3 + m(\lambda_{k,1}) < 0$, то по лемме 12

$$\mu_2\left(\alpha_k\right) \leqslant 1 - \frac{N_{k,3} + M_3 + M(\lambda_{k,1})}{N_{k,3} + M_3 + m(\lambda_{k,1})}. \tag{3.44}$$

Далее укажем значения параметров и приведем вычисления, из которых следуют оценки, предложенные в формулировке теоремы 7.

Чтобы оценить $\mu_2(\alpha_k)$, где $k = 2, 4, 6, 8, 10$, выберем параметры

$$a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, b_1 = 10.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2, 3, 4$, однозначно определяются через a_2, a_3, a_4, b_1 (см. (3.1)). Тогда (см. (3.11), (3.12))

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{9}; \frac{1}{2}\right) \bigcup \left[\frac{5}{9}; \frac{9}{10}\right),$$

$$\Omega_2 = \left[\frac{1}{7}; \frac{1}{6}\right) \bigcup \left[\frac{2}{9}; \frac{1}{4}\right) \bigcup \left[\frac{2}{7}; \frac{3}{10}\right) \bigcup \left[\frac{3}{7}; \frac{1}{2}\right) \bigcup \left[\frac{4}{7}; \frac{3}{5}\right) \bigcup \left[\frac{5}{7}; \frac{3}{4}\right) \bigcup \left[\frac{6}{7}; \frac{7}{8}\right).$$

Множества Ω_1, Ω_2 найдены с помощью компьютера. Отметим, что (см. (3.11), (3.13), (3.21), (3.22))

$$d_C \Delta_1' = d_{9n}.$$

Пользуясь (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.21), (3.22), (3.23), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 10 + 9 - \left(\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{9}\right) + \psi\left(\frac{5}{9}\right) - \psi\left(\frac{9}{10}\right)\right) - \\ - \left(\psi\left(\frac{1}{6}\right) - \psi\left(\frac{1}{7}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{6}{7}\right) - \psi\left(\frac{7}{8}\right)\right) = 8{,}20788\ldots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 2, 4, 6, 8, 10$ величины $m(\lambda_{k,1})$, $M(\lambda_{k,1})$, $N_{k,3}$, оценки сверху $\mu_2(\alpha_k)$, получающиеся из (3.44).

k	$m(\lambda_{k,1})$	$M(\lambda_{k,1})$	$N_{k,3}$	$\mu_2\left(\alpha_k\right) \leqslant$
2	$-10{,}85503\ldots$	$38{,}32874\ldots$	0	$18{,}57994\ldots$
4	$-10{,}66242\ldots$	$47{,}56119\ldots$	$-\ln 2^3$	$12{,}84161\ldots$
6	$-10{,}59461\ldots$	$53{,}07179\ldots$	$-\ln 3^3$	$11{,}20381\ldots$
8	$-10{,}55997\ldots$	$57{,}01460\ldots$	$-\ln 4^3$	$10{,}37857\ldots$
10	$-10{,}53894\ldots$	$60{,}08716\ldots$	$-\ln 5^3$	$9{,}86485\ldots$

Теорема 7 доказана. $\square$

Замечание. Доказана формула (3.44) для оценок квадратичных показателей иррациональности α_k, где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Более точные оценки $\mu_2(\alpha_k)$, где $k > 10$, чем те, что получаются из (3.44), приведены в теореме 2. При нечетных маленьких значениях k не удается оценить квадратичные показатели иррациональности α_k, так как в этих случаях

$$N_{k,3} + M_3 + m(\lambda_{k,1}) > 0.$$

3.8 Асимптотики $J_1(\gamma), J_2(\gamma), J_3(\gamma)$

Будем подставлять в качестве параметра t в $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ число

$$\gamma \in \mathbb{C}, |\gamma| = 1, -\pi < \arg\gamma < 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{(z+b_1)(z+b_2)(z+b_3)(z+b_4)}{(-z-a_1)(-z-a_2)(-z-a_3)(-z-a_4)} = \gamma \tag{3.45}$$

и функцию

$$g(y) = \arg(z+b_1) + \arg(z+b_2) + \arg(z+b_3) + \arg(z+b_4) - \\ - \arg(-z-a_1) - \arg(-z-a_2) - \arg(-z-a_3) - \arg(-z-a_4) - \arg\gamma.$$

Здесь $z = -b_1/2 + iy$. Считаем, что выполняется

$$\arg(z+b_1) = \arg(z+b_2) = \arg(z+b_3) = \arg(z+b_4) = \\ = \arg(-z-a_1) = \arg(-z-a_2) = \arg(-z-a_3) = \arg(-z-a_4) = 0$$

при $z = -b_1/2$.

Уравнение (3.45) имеет ровно четыре корня и все они лежат на прямой $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -b_1/2\}$. Действительно, в области $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < -b_1/2\}$ выполняются неравенства

$$|z + b_i| < |-z - a_i|, \text{ где } i = 1, 2, 3, 4.$$

Поэтому модуль левой части (3.45) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < -b_1/2\}$ меньше 1. Аналогично доказывается, что модуль левой части (3.45) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -b_1/2\}$ больше 1. Отсюда, учитывая, что

$|\gamma| = 1$, заключаем, что все четыре корня уравнения (3.45) лежат на прямой $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -b_1/2\}$.

Таким образом, $g(y') = 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда $z = -b_1/2 + iy'$ является корнем уравнения (3.45). Поскольку функция $g(y)$ непрерывно возрастает от $-4\pi - \arg\gamma$ до $4\pi - \arg\gamma$, когда y меняется от $-\infty$ до $+\infty$, и $g(0) = -\arg\gamma > 0$, то получаем, что два корня уравнения (3.45) лежат в верхней полуплоскости, а два других в нижней полуплоскости. Это точки

$$z_{1,\gamma} = -\frac{b_1}{2} + iy_{1,\gamma},\ z_{2,\gamma} = -\frac{b_1}{2} + iy_{2,\gamma},\ z_{3,\gamma} = -\frac{b_1}{2} + iy_{3,\gamma},\ z_{4,\gamma} = -\frac{b_1}{2} + iy_{4,\gamma},$$

в которых выполняется

$$g(y_{1,\gamma}) = 4\pi,\ g(y_{2,\gamma}) = 2\pi,\ g(y_{3,\gamma}) = 0,\ g(y_{4,\gamma}) = -2\pi.$$

Несложно также убедиться, что $y_{1,\gamma} > |y_{4,\gamma}| > y_{2,\gamma} > |y_{3,\gamma}| > 0$.

Теперь можно сформулировать предложение, которое говорит об асимптотике интегралов $J_1(\gamma)$, $J_2(\gamma)$, $J_3(\gamma)$.

В предложении 10 определяются функции $M(\gamma)$, $m(\gamma)$.

Предложение 10. *Имеют место равенства*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|J_1(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{1,\gamma}) = M(\gamma),$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|J_2(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{4,\gamma}) = m(\gamma),$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|J_3(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{2,\gamma}).$$

Доказательство предложения 10. Так как $|\gamma| = 1$ и $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ отличаются от $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ множителем $t^{-\frac{b_1 n+2}{2}}$ (см. (3.3)), то нам достаточно доказать

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|I_1(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{1,\gamma}),$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|I_2(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{4,\gamma}),$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln|I_3(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{2,\gamma}).$$

Выберем в качестве контуров L_1, L_2, L_3 вертикальную прямую

$$L = \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = -\frac{b_1 n}{2} + iy, -\infty < y < +\infty\right\}.$$

Также определим два луча

$$L^+ = \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = -\frac{b_1 n}{2} + iy, 0 \leqslant y < +\infty\right\},$$
$$L^- = \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = -\frac{b_1 n}{2} + iy, -\infty < y \leqslant 0\right\}.$$

Асимптотика $I_1(\gamma)$.

Используя свойства (1.61) гамма-функции, получаем

$$\Psi_1(\zeta) = \left(\frac{\sin \pi\zeta}{\pi}\right)^3 \frac{\Gamma(\zeta + b_1 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_1 n)}{\Gamma(c_1 n + 2)} \frac{\Gamma(\zeta + b_2 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_2 n)}{\Gamma(c_2 n + 2)} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(\zeta + b_3 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_3 n)}{\Gamma(c_3 n + 2)} \frac{\Gamma(\zeta + b_4 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_4 n)}{\Gamma(c_4 n + 2)} \frac{e^{-\zeta \ln\gamma - \zeta\pi i}}{(-1)^{(a_1+a_2+a_3+a_4)n}}.$$

Определим $I_1^+(\gamma)$, $I_1^-(\gamma)$ с помощью равенства

$$I_1(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^+} \Psi_1(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^-} \Psi_1(\zeta) d\zeta = I_1^+(\gamma) + I_1^-(\gamma).$$

Найдем асимптотику интеграла $I_1^+(\gamma)$.

Введем обозначение $\zeta = zn$. Отметим, что в последующих выражениях константа в $O\left(n^{-1}\right)$ не зависят от z. На основании формулы (1.58) Стирлинга и равенств

$$\mathrm{Re}^{-1}(\zeta + b_i n + 2) = O\left(n^{-1}\right) > 0, \mathrm{Re}^{-1}(-\zeta - a_i n) = O\left(n^{-1}\right) > 0, \text{ где } i = 1, 2, 3, 4,$$

при $\zeta \in L_1^+$ получаем

$$\Psi_1(\zeta) = \varphi_{1,+}(z) e^{n f_{1,+}(z)},$$

где

$$\begin{aligned} f_{1,+}(z) = &(z + b_1)\ln(z + b_1) - (z + a_1)\ln(-z - a_1) + \\ &+(z + b_2)\ln(z + b_2) - (z + a_2)\ln(-z - a_2) + \\ &+(z + b_3)\ln(z + b_3) - (z + a_3)\ln(-z - a_3) + \\ &+(z + b_4)\ln(z + b_4) - (z + a_4)\ln(-z - a_4) - \\ &- \ln c_1^{c_1} c_2^{c_2} c_3^{c_3} c_4^{c_4} - z\ln\gamma - 4z\pi i \end{aligned} \tag{3.46}$$

и

$$\begin{aligned} \varphi_{1,+}(z) = &\sqrt{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^4 \frac{(z + b_1)^3 (z + b_2)^3 (z + b_3)^3 (z + b_4)^4}{(-z - a_1)(-z - a_2)(-z - a_3)(-z - a_4) c_1^3 c_2^3 c_3^3 c_4^3}} \times \\ &\times (-1)^{(a_1+a_2+a_3+a_4)n} \left(\frac{e^{2z\pi i n} - 1}{2\pi i}\right)^3 \left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Совершим замену $\zeta = nz = n(d_3 + iy)$, тогда

$$I_1^+(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \Psi_1(\zeta)\, d\zeta = \frac{n}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_{1,+}(z) e^{n f_{1,+}(z)}\, dy.$$

Пусть $q_{1,+}(y) = \operatorname{Re} f_{1,+}(z)$, тогда

$$\begin{aligned} q'_{1,+}(y) = -\operatorname{Im}\left[\frac{\partial f_{1,+}}{\partial x}\right] = -Im\left[\frac{\partial f_{1,+}}{\partial z}\right] = \\ = -\operatorname{Im}[\ln(z+b_1) + \ln(z+b_2) + \ln(z+b_3) + \ln(z+b_4) - \\ - \ln(-z-a_1) - \ln(-z-a_2) - \ln(-z-a_3) - \ln(-z-a_4) - \ln\gamma - 4\pi i] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = -(\arg(z+b_1) + \arg(z+b_2) + \arg(z+b_3) + \arg(z+b_4) - \\ - \arg(-z-a_1) - \arg(-z-a_2) - \arg(-z-a_3) - \arg(-z-a_4) - \arg\gamma - 4\pi) = \\ = -(g(y) - 4\pi). \end{aligned}$$

Откуда заключаем, что $q'_{1,+}(y)$ — убывающая функция, поскольку $g(y)$ — возрастающая функция, когда y меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Равенство $q'_{1,+}(y) = 0$ возможно, если $g(y) = 4\pi$, то есть $y = y_{1,\gamma}$. Значит, функция $q_{1,+}(y)$ принимает наибольшее значение в точке $y_{1,\gamma}$ при $y \in [0; +\infty)$. Так как $z_{1,\gamma}$ — корень уравнения (3.45), то

$$e^{f'_{1,+}(z_{1,\gamma})} = \frac{(z_{1,\gamma}+b_1)(z_{1,\gamma}+b_2)(z_{1,\gamma}+b_3)(z_{1,\gamma}+b_4)}{(-z_{1,\gamma}-a_1)(-z_{1,\gamma}-a_2)(-z_{1,\gamma}-a_3)(-z_{1,\gamma}-a_4)\gamma} = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = f'_{1,+}(z_{1,\gamma}) = \ln(z_{1,\gamma}+b_1) - \ln(-z_{1,\gamma}-a_1) + \\ + \ln(z_{1,\gamma}+b_2) - \ln(-z_{1,\gamma}-a_2) + \\ + \ln(z_{1,\gamma}+b_3) - \ln(-z_{1,\gamma}-a_3) + \\ + \ln(z_{1,\gamma}+b_4) - \ln(-z_{1,\gamma}-a_4) - 4\pi i - \ln\gamma. \end{aligned} \tag{3.48}$$

При $z = -b_1/2 + iy$ верно разложение

$$\begin{aligned} f_{1,+}(z) = f_{1,+}(z_{1,\gamma}) + \frac{f''_{1,+}(z_{1,\gamma})}{2}(z - z_{1,\gamma})^2 + O\big((z - z_{1,\gamma})^2\big) = \\ = f_{1,+}(z_{1,\gamma}) - \frac{f''_{1,+}(z_{1,\gamma})}{2}(y - y_{1,\gamma})^2 + O\big((y - y_{1,\gamma})^2\big). \end{aligned}$$

При $z = -b_1/2 + iy$ выполняется неравенство

$$f''_{1,+}(z) = \left[-\frac{1}{z+a_1} - \frac{1}{z+a_2} - \frac{1}{z+a_3} - \frac{1}{z+a_4} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{z+b_1} + \frac{1}{z+b_2} + \frac{1}{z+b_3} + \frac{1}{z+b_4} \right] =$$
$$= \frac{c_1}{(c_1/2)^2 + y^2} + \frac{c_2}{(c_2/2)^2 + y^2} + \frac{c_3}{(c_3/2)^2 + y^2} + \frac{c_4}{(c_4/2)^2 + y^2} > 0.$$

Отсюда из теоремы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_1^+(\gamma)| = \operatorname{Re} f_{1,+}(z_{1,\gamma}) = \operatorname{Re} h(z_{1,\gamma}).$$

Последнее равенство выполняется ввиду (3.46) и (3.48).

Найдем асимптотику интеграла $I_1^-(t)$.

Введем обозначение $\zeta = zn$. На основании формулы (1.58) Стирлинга получаем

$$\Psi_1(\zeta) = \varphi_{1,-}(z) e^{nf_{1,-}(z)},$$

где (см. (3.46) и (3.47))

$$f_{1,-}(z) = f_{1,+}(z) + 6z\pi i \tag{3.49}$$

и

$$\varphi_{1,-}(z) = \varphi_{1,+}(z) e^{-6z\pi i}.$$

Совершим замену $\zeta = nz = n(d_3 + iy)$, тогда

$$I_1^-(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} \Psi_1(\zeta) d\zeta = \frac{n}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_{1,-}(z) e^{nf_{1,-}(z)} dy.$$

Пусть $q_{1,-}(y) = \operatorname{Re} f_{1,-}(z)$, тогда $q'_{1,-}(y) = -(g(y) + 2\pi)$. Отсюда заключаем, что $q'_{1,-}(y)$ — убывающая функция. Равенство $q'_{1,-}(y) = 0$ возможно, если $g(y) = -2\pi$, то есть $y = y_{4,\gamma}$. Значит, функция $q_{1,-}(y)$ принимает наибольшее значение в точке $y_{4,\gamma}$ при $y \in (-\infty; 0]$. Так как $z_{4,\gamma}$ — корень уравнения (3.45), то $e^{f'_{1,-}(z_{4,\gamma})} = 1$, следовательно, $f'_{1,-}(z_{4,\gamma}) = 0$. При $z = -b_1/2 + iy$ верно

$$f_{1,-}(z) = f_{1,-}(z_{4,\gamma}) - \frac{f''_{1,-}(z_{4,\gamma})}{2} (y - y_{4,\gamma})^2 + O\left((y - y_{4,\gamma})^2\right).$$

При $z = -b_1/2 + iy$ выполняется неравенство $f''_{1,-}(z) = f''_{1,+}(z) > 0$.

Отсюда из теоремы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_1^-(\gamma)| = \operatorname{Re} f_{1,-}(z_{4,\gamma}) = \operatorname{Re} h(z_{4,\gamma}).$$

Последнее равенство выполняется ввиду (3.49) и $f'_{1,-}(z_{4,\gamma}) = 0$.

Так как $y_{1,\gamma} > |y_{4,\gamma}| > 0$, то получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_1(\gamma)| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_1^+(\gamma)+I_1^-(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{1,\gamma}).$$

Асимптотика $I_2(\gamma)$.

Используя свойства (1.61) гамма-функции, получаем

$$\Psi_2(\zeta) = \left(\frac{\sin\pi\zeta}{\pi}\right)^2 \frac{\Gamma(\zeta+b_1n+2)\Gamma(-\zeta-a_1n)}{\Gamma(c_1n+2)}\frac{\Gamma(\zeta+b_2n+2)\Gamma(-\zeta-a_2n)}{\Gamma(c_2n+2)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\zeta+b_3n+2)\Gamma(-\zeta-a_3n)}{\Gamma(c_3n+2)}\frac{\Gamma(\zeta+b_4n+2)\Gamma(-\zeta-a_4n)}{\Gamma(c_4n+2)}\frac{e^{-\zeta\ln\gamma}}{(-1)^{a_1n+a_2n+a_3n+a_4n}}.$$

Определим $I_2^+(\gamma)$, $I_2^-(\gamma)$ с помощью равенства

$$I_2(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^+}\Psi_2(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^-}\Psi_2(\zeta)\,d\zeta = I_2^+(\gamma)+I_2^-(\gamma).$$

Найдем асимптотику интеграла $I_2^+(\gamma)$.

Введем обозначение $\zeta = zn$. На основании формулы (1.58) Стирлинга получаем

$$\Psi_2(\zeta) = \varphi_{2,+}(z)e^{nf_{2,+}(z)},$$

где (см. (3.46) и (3.47))

$$f_{2,+}(z) = f_{1,+}(z) + 2z\pi i \tag{3.50}$$

и

$$\varphi_{2,+}(z) = \varphi_{1,+}(z)\left(\frac{e^{2iz\pi n}-1}{2i\pi}\right)^{-1}\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right).$$

Совершим замену $\zeta = nz = n(d_3+iy)$, тогда

$$I_2^+(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+}\Psi_2(\zeta)d\zeta = \frac{n}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\varphi_{2,+}(z)e^{nf_{2,+}(z)}dy.$$

Пусть $q_{2,+}(y) = \operatorname{Re} f_{2,+}(z)$, тогда $q'_{2,+}(y) = -(g(y)-2\pi)$. Отсюда заключаем, что $q'_{2,+}(y)$ — убывающая функция. Равенство $q'_{2,+}(y) = 0$ возможно, если $g(y)=0$, то есть $y=y_{2,\gamma}$. Значит, функция $q_{2,+}(y)$ принимает наибольшее значение в точке $y_{2,\gamma}$ при $y\in[0;+\infty)$. Так как $z_{2,\gamma}$ — корень уравнения (3.45), то $e^{f'_{2,+}(z_{2,\gamma})}=1$, следовательно, $f'_{2,+}(z_{2,\gamma})=0$. При $z=-b_1/2+iy$ верно

$$f_{2,+}(z)=f_{2,+}(z_{2,\gamma})-\frac{f''_{2,+}(z_{2,\gamma})}{2}(y-y_{2,\gamma})^2+O\left((y-y_{2,\gamma})^2\right).$$

При $z=-b_1/2+iy$ выполняется неравенство $f''_{2,+}(z)=f''_{1,+}(z)>0$.

Отсюда из теоремы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|I_2^+(\gamma)|=\operatorname{Re}f_{2,+}(z_{2,\gamma})=\operatorname{Re}h(z_{2,\gamma}).$$

Последнее равенство выполняется ввиду (3.50) и $f'_{2,+}(z_{2,\gamma})=0$.

Найдем асимптотику интеграла $I_2^-(\gamma)$.

Введем обозначение $\zeta=zn$. На основании формулы (1.58) Стирлинга получаем

$$\Psi_2(\zeta)=\varphi_{2,-}(z)e^{nf_{2,-}(z)},$$

где (см. (3.46) и (3.47))

$$f_{2,-}(z)=f_{1,+}(z)+6z\pi i \tag{3.51}$$

и

$$\varphi_{2,-}(z)=\varphi_{1,+}(z)e^{-4iz\pi n}\left(\frac{e^{2iz\pi n}-1}{2i\pi}\right)^{-1}\left(1+O\left(n^{-1}\right)\right).$$

Совершим замену $\zeta=nz=n(d_3+iy)$, тогда

$$I_2^-(\gamma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L^-}\Psi_2(\zeta)d\zeta=\frac{n}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi_{2,-}(z)e^{nf_{2,-}(z)}dy.$$

Пусть $q_{2,-}(y)=\operatorname{Re}f_{2,-}(z)$, тогда $q'_{2,-}(y)=-(g(y)+2\pi)$. Отсюда заключаем, что $q'_{2,-}(y)$ — убывающая функция. Равенство $q'_{2,-}(y)=0$ возможно, если только $g(y)=-2\pi$, то есть $y=y_{4,\gamma}$. Значит, функция $q_{2,-}(y)$ принимает наибольшее значение в точке $y_{4,\gamma}$ при $y\in(-\infty;0]$. Так как $z_{4,\gamma}$ — корень уравнения (3.45), то $e^{f'_{2,-}(z_{4,\gamma})}=1$, следовательно, $f'_{2,-}(z_{4,\gamma})=0$. При $z=-b_1/2+iy$ верно

$$f_{2,-}(z)=f_{2,-}(z_{4,\gamma})-\frac{f''_{2,-}(z_{4,\gamma})}{2}(y-y_{4,\gamma})^2+O\left((y-y_{4,\gamma})^2\right).$$

При $z = -b_1/2 + iy$ выполняется неравенство $f''_{2,-}(z) = f''_{1,+}(z) > 0$.

В соответствии с теоремой 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_2^-(\gamma)| = \operatorname{Re} f_{2,-}(z_{4,\gamma}) = \operatorname{Re} h(z_{4,\gamma}).$$

Последнее равенство выполняется ввиду (3.51) и $f'_{2,-}(z_{4,\gamma}) = 0$.

Так как $y_{4,\gamma} > |y_{2,\gamma}| > 0$, то получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_2(\gamma)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_2^+(\gamma) + I_2^-(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{4,\gamma}).$$

Асимптотика $I_3(\gamma)$.

Используя свойства (1.61) гамма-функции, получаем

$$\Psi_3(\zeta) = \left(\frac{\sin \pi\zeta}{\pi}\right) \frac{\Gamma(\zeta + b_1 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_1 n)}{\Gamma(c_1 n + 2)} \frac{\Gamma(\zeta + b_2 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_2 n)}{\Gamma(c_2 n + 2)} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(\zeta + b_3 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_3 n)}{\Gamma(c_3 n + 2)} \frac{\Gamma(\zeta + b_4 n + 2)\Gamma(-\zeta - a_4 n)}{\Gamma(c_4 n + 2)} \frac{e^{-\zeta \ln \gamma - \zeta \pi i}}{(-1)^{a_1 n + a_2 n + a_3 n + a_4 n}}.$$

Определим $I_3^+(\gamma)$, $I_3^-(\gamma)$ с помощью равенства

$$I_3(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L^+} \Psi_3(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L^-} \Psi_3(\zeta) d\zeta = I_3^+(\gamma) + I_3^-(\gamma).$$

Найдем асимптотику интеграла $I_3^+(\gamma)$.

Введем обозначение $\zeta = zn$. На основании формулы (1.58) Стирлинга получаем

$$\Psi_3(\zeta) = \varphi_{3,+}(z) e^{n f_{3,+}(z)},$$

где (см. (3.46) и (3.47))

$$f_{3,+}(z) = f_{1,+}(z) + 2z\pi i \tag{3.52}$$

и

$$\varphi_{3,+}(z) = \varphi_{1,+}(z) \left(\frac{e^{2iz\pi n} - 1}{2i\pi}\right)^{-2} \left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right).$$

Совершим замену $\zeta = nz = n(d_3 + iy)$, тогда

$$I_3^+(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \Psi_3(\zeta)\, d\zeta = \frac{n}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_{3,+}(z) e^{n f_{3,+}(z)}\, dy.$$

Пусть $q_{3,+}(y) = \operatorname{Re} f_{3,+}(z)$, тогда $q'_{3,+}(y) = -(g(y) - 2\pi)$. Отсюда заключаем, что $q'_{3,+}(y)$ — убывающая функция. Равенство $q'_{3,+}(y) = 0$ возможно, если $g(y) = 0$, то есть $y = y_{2,\gamma}$. Значит, функция $q_{3,+}(y)$ принимает наибольшее значение в точке $y_{2,\gamma}$ при $y \in [0; +\infty)$. Так как $z_{2,\gamma}$ — корень уравнения (3.45), то $e^{f'_{3,+}(z_{2,\gamma})} = 1$, следовательно, $f'_{3,+}(z_{2,\gamma}) = 0$. При $z = -b_1/2 + iy$ верно

$$f_{3,+}(z) = f_{3,+}(z_{2,\gamma}) - \frac{f''_{3,+}(z_{2,\gamma})}{2}(y - y_{2,\gamma})^2 + O\left((y - y_{2,\gamma})^2\right).$$

При $z = -b_1/2 + iy$ выполняется $f''_{3,+}(z) = f''_{1,+}(z) > 0$.

Отсюда из теоремы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_3^+(\gamma)| = \operatorname{Re} f_{3,+}(z_{2,\gamma}) = \operatorname{Re} h(z_{2,\gamma}).$$

Последнее равенство выполняется ввиду (3.52) и $f'_{3,+}(z_{2,\gamma}) = 0$.

Найдем асимптотику интеграла $I_3^-(\gamma)$.

Введем обозначение $\zeta = zn$. На основании формулы (1.58) Стирлинга получаем

$$\Psi_3(\zeta) = \varphi_{3,-}(z)e^{nf_{3,-}(z)},$$

где (см. (3.46) и (3.47))

$$f_{3,-}(z) = f_{1,+}(z) + 4z\pi i \tag{3.53}$$

и

$$\varphi_{3,-}(z) = \varphi_{1,+}(z)e^{-2iz\pi n}\left(\frac{e^{2iz\pi n} - 1}{2i\pi}\right)^{-2}\left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right).$$

Совершим замену $\zeta = nz = n(d_3 + iy)$, тогда

$$I_3^-(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^-} \Psi_3(\zeta)d\zeta = \frac{n}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_{3,-}(z)e^{nf_{3,-}(z)}dy.$$

Пусть $q_{3,-}(y) = \operatorname{Re} f_{3,-}(z)$, тогда $q'_{3,-}(y) = -(g(y))$. Отсюда заключаем, что $q'_{3,-}(y)$ — убывающая функция. Равенство $q'_{3,-}(y) = 0$ возможно, если только $g(y) = 0$, то есть $y = y_{3,\gamma}$. Значит, функция $q_{3,-}(y)$ принимает наибольшее значение в точке $y_{3,\gamma}$ при $y \in (-\infty; 0]$. Так как $z_{3,\gamma}$ — корень уравнения (3.45), то $e^{f'_{3,-}(z_{3,\gamma})} = 1$, следовательно, $f'_{3,-}(z_{3,\gamma}) = 0$. При $z = -b_1/2 + iy$ верно

$$f_{3,-}(z) = f_{3,-}(z_{3,\gamma}) - \frac{f''_{3,-}(z_{3,\gamma})}{2}(y - y_{3,\gamma})^2 + O\left((y - y_{3,\gamma})^2\right).$$

При $z = -b_1/2 + iy$ выполняется $f''_{3,-}(z) = f''_{1,+}(z) > 0$.

Отсюда из теоремы 3 получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_3^-(\gamma)| = \operatorname{Re} f_{3,-}(z_{3,\gamma}) = \operatorname{Re} h(z_{3,\gamma}).$$

Последнее равенство выполняется ввиду (3.53) и того, что $f'_{3,-}(z_{3,\gamma}) = 0$.

Так как $y_{2,\gamma} > |y_{3,\gamma}| > 0$, то получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_3(\gamma)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |I_3^+(\gamma) + I_3^-(\gamma)| = \operatorname{Re} h(z_{2,\gamma}).$$

Предложение 10 доказано. □

3.9 Оценки квадратичных показателей иррациональности β_k

Получены оценки сверху показателей иррациональности чисел

$$\beta_k = \sqrt{2k-1}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2k-1}}{k-1},\ \text{где } k = 4, 6, 8.$$

Теорема 8. *Справедливы оценки.*

k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$	k	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$
4	$32,26974\ldots$	6	$17,64930\ldots$	8	$14,12795\ldots$

Доказательство теоремы 8. Доказательство теоремы 8 основано на лемме 12. Рассмотрим последовательности (см. определение $\lambda_{k,2}$ в (3.29))

$$l_n = -R_{k,n,3}D_3\Lambda(2k-1)J_2(\lambda_{k,2}) =$$
$$= R_{k,n,3}D_3U_1(\lambda_{k,2})\Lambda i\sqrt{2k-1}\cdot\beta_k - R_{k,n,3}D_3(-(2k-1))U_2(\lambda_{k,2})\Lambda = q_n\beta_k + p_n.$$

$$m_n = -R_{k,n,3}D_3\left(2J_3(\lambda_{k,2}) + 2(i\pi + \ln\lambda_{k,2})J_2(\lambda_{k,2})\right)\Lambda(2k-1)^{3/2}i =$$
$$= R_{k,n,3}D_3U_1(\lambda_{k,2})\Lambda i\sqrt{2k-1}\cdot\beta_k^2 + R_{k,n,3}D_3U_3(\lambda_{k,2})\Lambda i(2k-1)^{3/2} = q_n\beta_k^2 + r_n.$$

Из леммы 18 следует, что p_n, q_n, $r_n \in \mathbb{Z}$.

Из предложения 10 при $\gamma = \lambda_{k,2}$ получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |q_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |R_{k,n,3}D_3U_1(\lambda_{k,2})\Lambda i\sqrt{2k-1}| =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln |R_{k,n,3}D_3J_1(\lambda_{k,2})\Lambda i\sqrt{2k-1}| = K_3 + M_3 + M(\lambda_{k,2}),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|l_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|R_{k,n,3}D_3\Lambda(2k-1)J_2(\lambda_{k,2})| = N_{k,3}+M_3+m(\lambda_{k,2}),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|m_n| =$$
$$= \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left|R_{k,n,3}D_3\left(2J_3(\lambda_{k,2})+2(i\pi+\ln\lambda_{k,2})J_2(\lambda_{k,2})\right)\Lambda(2k-1)^{3/2}i\right| =$$
$$= N_{k,3}+M_3+m(\lambda_{k,2}).$$

Здесь (см. (3.30), (3.23))

$$N_{k,3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(R_{k,n,3}) = \begin{cases} -\dfrac{c_3}{2}\ln m, & \text{если } k=2m, \\ -\dfrac{c_3}{2}\ln k + \dfrac{c_1+c_2+c_3+c_4}{2}\ln 2, & \text{если } k=2m-1, \end{cases}$$

$$M_3 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln D_3.$$

Если $N_{k,3}+M_3+m(\lambda_{k,2})<0$, то по лемме 12

$$\mu_2(\beta_k) \leqslant 1 - \frac{N_{k,3}+M_3+M(\lambda_{k,2})}{N_{k,3}+M_3+m(\lambda_{k,2})}. \tag{3.54}$$

Далее укажем значения параметров и приведем вычисления, из которых следуют оценки, предложенные в формулировке теоремы 8.

Чтобы оценить $\mu_2(\beta_k)$, где $k=4,6,8$, выберем параметры

$$a_2=1, a_3=2, a_4=3, b_1=10.$$

Остальные параметры a_i, b_i, c_i, где $i=1,2,3,4$, однозначно определяются через a_2, a_3, a_4, b_1 (см. (3.1)). Тогда (см. (3.11), (3.12))

$$\Omega_1 = \left[\frac{1}{9};\frac{1}{2}\right)\bigcup\left[\frac{5}{9};\frac{9}{10}\right),$$

$$\Omega_2 = \left[\frac{1}{7};\frac{1}{6}\right)\bigcup\left[\frac{2}{9};\frac{1}{4}\right)\bigcup\left[\frac{2}{7};\frac{3}{10}\right)\bigcup\left[\frac{3}{7};\frac{1}{2}\right)\bigcup\left[\frac{4}{7};\frac{3}{5}\right)\bigcup\left[\frac{5}{7};\frac{3}{4}\right)\bigcup\left[\frac{6}{7};\frac{7}{8}\right).$$

Множества Ω_1, Ω_2 найдены с помощью компьютера. Отметим, что (см. (3.11), (3.13), (3.21), (3.22))

$$d_C\Delta_1' = d_{9n}.$$

Пользуясь (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.21), (3.22), (3.23), из леммы 11 и закона распределения простых чисел получаем

$$M_3 = 10 + 9 - \left(\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{9}\right) + \psi\left(\frac{5}{9}\right) - \psi\left(\frac{9}{10}\right)\right) -$$
$$- \left(\psi\left(\frac{1}{6}\right) - \psi\left(\frac{1}{7}\right) + \cdots + \psi\left(\frac{6}{7}\right) - \psi\left(\frac{7}{8}\right)\right) = 8,20788\ldots.$$

Приведем таблицу, в которой указаны для $k = 4, 6, 8$ величины $m(\lambda_{k,2})$, $M(\lambda_{k,2})$, $N_{k,3}$, оценки сверху $\mu_2(\beta_k)$, получающиеся из (3.54).

k	$m(\lambda_{k,2})$	$M(\lambda_{k,2})$	$N_{k,3}$	$\mu_2(\beta_k) \leqslant$
4	$-7,81105\ldots$	$46,48631\ldots$	$-\ln 2^3$	$32,26974\ldots$
6	$-8,35174\ldots$	$52,35649\ldots$	$-\ln 3^3$	$17,64930\ldots$
8	$-8,65958\ldots$	$56,47845\ldots$	$-\ln 4^3$	$14,12795\ldots$

Теорема 8 доказана. □

Замечание. Доказана формула (3.54) для оценок квадратичных показателей иррациональности β_k, где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Более точные оценки $\mu_2(\beta_k)$, где $k > 8$, чем те, что получаются из (3.54), приведены в теореме 5. При нечетных маленьких значениях k не удается оценить квадратичные показатели иррациональности β_k, так как в этих случаях

$$N_{k,3} + M_3 + m(\lambda_{k,2}) > 0.$$

Список литературы

[1] В. А. Андросенко, В. Х. Салихов, Интеграл Марковеккио и мера иррациональности $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. *Вестник БГТУ*, (2011) **34**:4, 129 – 132.

[2] М. Г. Башмакова, Оценка мер иррациональности логарифма “золотого сечения”. *Чебышевский сборник*, (2010) **11**:1, 47 – 53.

[3] М. Г. Башмакова, *Об оценках иррациональности некоторых значений логарифмической функции.* Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук. Брянский государственный технический университет. Брянск. 2011. 91 с.

[4] Л. В. Данилов, Рациональные приближения некоторых функций в рациональных точках. *Матем. заметки*, (1978) **24**:4, 449 – 458.

[5] А. К. Дубицкас, Приближения $\pi/\sqrt{3}$ рациональными дробями. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, (1987) **6**, 73 – 76.

[6] В. В. Зудилин, Эссе о мерах иррациональности π и других логарифмов. *Чебышёвский сборник*, (2004) **5**:2, 49 – 65.

[7] Дж. В. В. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений.* Издательство иностранной литературы, Москва, 1961. 213 с.

[8] Ю. Люк, *Специальные математические функции и их аппросимация.* Мир, Москва, 1980. 608 с.

[9] Ю. В. Нестеренко, Некоторые замечания о $\zeta(3)$. *Матем. заметки*, (1996) **59**:6, 865 – 880.

[10] Ю. В. Нестеренко, О показателе иррациональности числа $\ln 2$. *Матем. заметки*, (2010) **88**:4, 549 – 564.

[11] Е. А. Рухадзе, Оценка снизу для приближения $\ln 2$ рациональными числами. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, (1987) **6**, 25 – 29.

[12] В. Х. Салихов, О мере иррациональности $\log 3$. *Докл. РАН*, (2007) **417**:6, 753 – 755.

[13] Б. Г. Тасоев, О рациональных приближениях некоторых чисел. *Матем. заметки*, (2000) **67**:6, 931 – 937.

[14] Э. Т. Уитеккер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции.* Физматгиз, Москва, 1963. с. 516.

[15] А. Б. Шидловский, *Диофантовы приближения и трансцендентные числа.* Физматлит, Москва, 2007. с. 266.

[16] В. Шмидт, *Диофантовы приближения.* МИР, Москва, 1983. с. 232.

[17] K. Alladi, M. Robinson, On centain irrational value of the logrithm. *Lect. Notes Math.*, (1979) **751** , 1 – 9.

[18] K. Alladi,M. L. Robinson, Legendre polynomials and irrationality. *J. Reine Angew. Math.*, (1980) **318**, 137 – 155.

[19] A. Baker, Approximations to the logarithms of the certain rational numbers. *Acta Arithm.*, (1964) **10**, 315 — 323.

[20] M. G. Bashmakova, Estimates for the exponent of irrationality for certain values of hypergeometric functions. *M. Jour. of Combin. and Number Theory*, (2011) **1**:1, 823 – 835.

[21] G. V. Chudnovsky, Approximations rationnelles des logarithmes de nombres rationnels. *C.r. Acad. sci., Ser.A*, (1979) **228**:21, 607 – 609.

[22] G. V. Chudnovsky, Measures of irrationality, transcendence and algebraic independence. *Lond. Math. Sot. Lect. Note Ser.*, (1982) **56**, 11 – 82. Zbl 489.10027.

[23] G. V. Chudnovsky, Number theoretic applications of polynomians with rational coeffitients defined by extremality conditions. *Progr.Math.*, (1983) **35**, 61 – 105.

[24] G. V. Chudnovsky, Recurrences Pade approximations and their applications. *Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 92*, Dekker, New York, 1984. p. 215 – 238.

[25] H. Cohen, Acceleration de la convergence de certaines recurrences lineaires. *Seminaire de Theorie des Nombres*, Grenoble, 1980, p. 47.

[26] M. Hata, Legendre type polynomials and irrationality measures. *J. reine and angew. Math.*, (1990) **407**, 99 – 125.

[27] M. Hata, Rational approximations to π and some other numbers. *Acta Arith.*, (1993) **63**, 335 – 349.

[28] M. Hata, $\mathbb{C}^2$-saddle method and Beukers' integral. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (2000), **352**;10, 4557 – 4583.

[29] R. Marcovecchio, The Rhin-Viola method for $\log 2$. *Acta Arith.*, (2009) **139**:2, 147 – 184.

[30] E. Reyssat, Mesures de transcendance pour les logarithmes de nombres rationnels. *Progr. in Math., vol. 31*, Birkhauser, Boston, 1983. p. 235 – 245.

[31] G. Rhin, Approximants de Pade et mesures effectives d'irrationalite. *Seminaire de Theorie des Nombres*, Paris, 1985–86. *Progress in Math., vol. 71*, Birkhauser, Boston, 1987. p. 155 — 164.

[32] G. Rhin, C. Viola, On a permutation group related to $\zeta(2)$. *Acta Arith.*, (1996) **77**, 23 – 56.

[33] G. Rhin, C. Viola, The group structure for $\zeta(3)$. *Acta Arith.*, (2001) **97**, 269 – 293.

[34] K. F. Roth, Rational Approximations to Algebraic Numbers. *Mathematatika*, (1955) **2**, 1 – 20.

[35] J. Sondow, Irrationality Measures, Irrationality Bases, and a Theorem of Jarnik. http://arxiv.org/abs/math.NT/0406300.

Публикации автора

[36] А. А. Полянский, О квадратичном показателе иррациональности $\ln 2$. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, (2012) **1**, 25 – 30.

[37] А. А. Полянский, О квадратичных показателях иррациональности некоторых чисел. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, (2013) **5**, 25 – 29.

[38] А. А. Полянский, О показателях иррациональности некоторых чисел. ч. II. Деп. в ВИНИТИ, №181 — В 2013, с. 1 – 21.

[39] A. Polyanskii, On the irrationality measure of certain numbers. *M. Jour. Comb. and Number Theory*, (2011) **1**:4, 80 – 90.